Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Kosinová a sinová věta na střední škole

Cosine and sine theorem at the secondary school

David Zenkl

Vedoucí práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: N M

2016

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Kosinová a sinová věta na střední škole vypracoval pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 13. dubna 2016

....

podpis

Poděkování

Děkuji vedoucí mé diplomové práce doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za konzultace při vypracování práce, za poskytnutí zdrojů, ze kterých jsem čerpal, a za cenné rady, které mi ochotně poskytla. Také děkuji prof. RNDr. Milanu Hejnému, CSc. za poskytnuté rady při konzultaci. Děkuji profesorce Křesťanského gymnázia PhDr. Michaele Ulrychové, PhD. za reflexe odučených hodin. V neposlední řadě děkuji své rodině a přátelům za podporu při psaní této práce.

ABSTRAKT

Diplomová práce se zabývá konstruktivistickým přístupem k zavedení kosinové a sinové věty na střední škole. Cílem bylo vytvořit doporučení pro výukovou praxi charakteristické podnětným přístupem k výuce kosinové a sinové věty. Tento přístup vychází z dostupné literatury a staví na zkušenostech z vlastní výuky tohoto tématu. Podnětným přístupem je myšlen přístup, který je v souladu s principy konstruktivismu a klade důraz na vlastní aktivní poznávání žáků. Současné učebnice pro střední školy byly analyzovány z matematicko-didaktického hlediska s cílem popsat, jak je tematika zpracována v publikacích dostupných učitelům, a získat inspiraci pro vlastní přístup. Vlastní výukový přístup byl založen na teorii generických modelů a byl realizován v rámci výuky ve dvou třídách gymnázia. Data sebraná při výuce kosinové a sinové věty (tedy videozáznamy výuky, terénní zápisky z výuky a žákovské artefakty) byla analyzována kvalitativním způsobem. Práce podrobně popisuje průběh výuky s důrazem na klíčové fáze objevu obou vět. Je sledováno zapojení žáků v tomto procesu. Tam, kde výuka neprobíhala podle plánu, jsou uvedeny možné důvody a navrženy změny v plánu. V rámci výuky bylo ověřeno, že prezentovaný přístup k výuce tohoto tématu umožnil žákům objevit mnoho dílčích poznatků samostatně a poskytnul jim příležitost k pochopení této části matematiky.

KLÍČOVÁ SLOVA

kosinová věta, sinová věta, konstruktivistický přístup, teorie generických modelů, podnětná výuka, objevování, žáci, gymnázium

ABSTRACT

This thesis is concerned with a constructivist approach to the introduction of the cosine and sine theorems at the secondary school. The aim was to develop recommendations for teaching which are based on the idea of motivating teaching cosine and sine theorems. This approach is based on available literature and builds on experience from my own teaching of this topic. By motivating teaching, I mean an approach that is consistent with the principles of constructivism and emphasizes pupils' active learning. Current textbooks for secondary schools were analyzed from a mathematical and didactic point of view. The aim of this analysis is to describe how the topic is elaborated in publications available to teachers, and to get inspiration for my own approach. My own teaching approach was based on the theory of generic models and has been implemented in two classes of the secondary grammar school. Data collected during teaching cosine and sine theorems (video recordings of lessons, field notes from teaching and pupil artifacts) were analyzed in a qualitative way. The thesis describes the teaching in detail, with an emphasis on key phases of the discovery of the two theorems. Pupils' involvement in this process is closely followed. Where teaching did not work as planned, possible reasons are found and suggested changes to the plan made. It has been shown that the presented approach to teaching this topic allowed pupils to discover many pieces of knowledge on their own and provided them with an opportunity to understand this part of mathematics.

KEYWORDS

cosine theorem, sine theorem, constructivist approach, theory of generic models, motivative learning, discovery, pupils, secondary grammar school

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Je obecně známo, že člověk je tvor zvídavý. Z vlastních zkušeností můžeme říci, že pro děti to platí dvojnásob. Ptejme se tedy, jak této skutečnosti využít ve vzdělávacím procesu. Jednou z cest je motivovat žáky tím způsobem, abychom v nich podnítili zvídavost pro námi zamýšlené téma. Dále bychom jim měli poskytnout dostatek prostoru pro objevování zákonitostí a řešení přiměřených problémů. Případné vyřešení problému vyvolává v žácích pocit radosti a tento úspěch může žáky motivovat k dalšímu poznávání.

Za téma své diplomové práce jsem si zvolil kosinovou a sinovou větu na střední škole. Kosinová a sinová věta jsou matematické věty, které na základě znalosti některých velikostí stran nebo vnitřních úhlů trojúhelníku předepisují pravidla, jak vypočítat velikosti zbylých stran nebo vnitřních úhlů trojúhelníku. Níže nahrazuji úlohu na vypočítání zbylých velikostí stran nebo vnitřních úhlů obecného trojúhelníku pojmem „úloha na řešení trojúhelníku". Trigonometrie je název pro geometrii zabývající se řešením trojúhelníku pomocí goniometrických funkcí. Proto níže nahrazuji kosinovou a sinovou větu pojmem „trigonometrické věty". Trigonometrické věty měly v historii široké uplatnění ve své sférické podobě. Sférická trigonometrie totiž úzce souvisí s mořeplavectvím a astronomií ([Odvárko 2007], s. 130). Historie kosinové věty je dlouhá, její trochu odlišné vyjádření nalezneme již v Euklidových Základech ([Stehlíková, Hejný, Jirotková 2005], s. 34).

Motivací mé práce byla snaha získat zkušenosti s podnětnou výukou trigonometrických vět na gymnáziu. Výuka (níže také „experimentální výuka") probíhala ve dvou třídách Křesťanského gymnázia v Praze – Hostivaři. V obou paralelkách do té doby vyučovala stejná paní učitelka, která látku dovedla před téma trigonometrických vět.

Cílem předložené práce je a) popsat, jak k výuce trigonometrických vět přistupují autoři vybraných učebnic matematiky pro střední školy, b) naplánovat, realizovat a vyhodnotit experimentální výuku těchto vět podnětným způsobem, c) upravit plán výuky s využitím poznatků z experimentální výuky.

Práce sestává z šesti kapitol. V kapitole 3 přináším popis odvození trigonometrických vět, který tvoří jádro mého výukového přístupu k nim. V kapitole 2 uvádím stručný nástin matematicko-didaktických pojmů z teorie generických modelů, podle které analyzuji středoškolské učebnice trigonometrie (kapitola 4). Tato teorie představuje i teoretické pozadí mnou realizované experimentální výuky, jejíž přípravu, realizaci a vyhodnocení detailně popisuji v kapitole 5. Na základě zhodnocení experimentální výuky jsem upravil přípravu pro výuku obou trigonometrických vět. Práce je ukončena závěrem, v němž jsem nastínil své pedagogické přesvědčení nabyté získanými zkušenostmi.

Kapitola 2

Teoretické pozadí práce

2.1 Teorie generických modelů

Teorie generických modelů (např. [Hejný 2014], s. 39–74) je teorie popisující, jak se žáci učí matematice. Poznávací proces má podle této teorie pět etap: motivaci, izolované modely, generický model, abstraktní poznatek a krystalizaci. Kognitivním posunům mezi některými etapami říká M. Hejný zdvihy. Zdvih mezi etapou izolovaných modelů a etapou generického modelu se nazývá zobecnění. Zdvih mezi etapou generického modelu a etapou abstraktního poznatku se nazývá abstrakce.

Motivace k poznávání hraje klíčovou roli v celém procesu. Intenzivnější a hlubší poznávání mají žáci s vnitřní potřebou poznávání, kteří nejsou k poznávání nuceni zvnějšku. Těmto vnějším podnětům říká M. Hejný stimulace a lze mezi ně zařadit známkování, snahu se zalíbit učiteli nebo rodičům apod. Jak jsem se zmínil již v úvodu, dítě je tvor zvídavý. Má silnou vrozenou potřebu k poznávání nových jevů. Učitelé na druhé straně používají různé přístupy, jak žáky motivovat. Jedná se například o zařazení soutěže nebo atraktivního kontextu do výuky matematice. Motivace ke školnímu poznávání je podle M. Hejného založena na rozporu mezi „nevím“ a „potřebuji znát“ ([Hejný 2014]), který lze podporovat nezodpovězenými otázkami, které třídu názorově rozdělují.

Nejúčinnější motivace však podle M. Hejného přichází z žákova pocitu úspěchu, z radosti, kterou mu přináší pocit dobře vyřešené úlohy a prožité AHA-okamžiky. Úloha, která by měla hrát motivační roli, musí být přiměřená svou náročností. Úloha musí být jednak jednoduchá, aby ji žák vyřešil nebo se alespoň mohl do řešení pustit, jednak dostatečně složitá, aby měl žák z jejího vyřešení radost. Jelikož je složitost matematických úloh individuální záležitost, je zapotřebí výuku vhodně individualizovat. Potom může být každý žák aktivní a postupovat vlastním tempem.

Izolovaný model je konkrétní příklad budované znalosti. Série izolovaných modelů představuje podle M. Hejného sběr zkušeností, ale i pronikání do podstaty problému a vyjasňování terminologie. Jedná se o poměrně dlouhou etapu, jejíž délka závisí na složitosti zkoumaného problému. Čím je problém složitější, tím je tato etapa delší. M. Hejný rozděluje etapu izolovaného modelu do čtyř podetap:

1. uvědomění si prvního izolovaného modelu,
2. další izolované modely, v mysli žáka nepropojené,
3. shlukování některých izolovaných modelů do skupin,
4. zjištění podstaty stejnosti v rámci jedné skupiny.

Problematickému přechodu ze druhé do třetí podetapy může pomoci tabulka nebo jiný způsob vizualizace. Tabulka totiž vede žáky k přehledné organizaci získaných výsledků.

Procesem zobecnění (generalizací) série izolovaných modelů vzniká generický model. Jedná se o konkrétní jev, který v sobě zahrnuje všechny předchozí izolované modely (jednotlivé zkušenosti), a je tedy chápán jako obecný. Často je toto zobecnění spojeno s náhlým prozřením (AHA-efektem), které vystihne podstatu stejnosti izolovaných modelů. Podle M. Hejného je generický model jádrem skutečného poznání. Kvalitu matematických znalostí žáka totiž zjišťujeme podle toho, kolik generických modelů daného jevu žák ovládá a jakým způsobem.

M. Hejný rozlišuje dva typy generických modelů. Prvním je procesuální generický model, který přináší informaci rekurentním způsobem, jak na základě znalosti předchozích jevů odhalit pokračování procesu. Pro velmi vzdálený jev nedává tento způsob rychlý postup řešení. Druhým je konceptuální model, jakýsi obecný způsob vyjádření vztahu.

Generický model má dvojí roli. Jednak sjednocuje všechny izolované modely, a to i ty dosud neevidované, jednak je předstupněm pro generický model vyšší úrovně nebo pro abstraktní poznatek.

> Generický model popisuje jistý poznatek (pojem, návod, vztah, postup či situaci) pomocí konkrétních čísel nebo tvarů na které nahlížíme jako na obecná čísla nebo tvary. ([Hejný 2014], s. 58)

Procesem nahrazení těchto konkrétních jevů obecnými (např. písmeny) přecházíme do etapy abstraktního poznatku. Abstrakční zdvih je často provázen změnou jazyka. Ze školské praxe víme, že jazyk písmen je pro žáky velice náročný. Učitel by neměl dávat žákům tento silný nástroj k dispozici příliš brzy, naopak žáci by měli pocítit potřebu tohoto jazyka.

Krystalizace je poslední etapa poznávání. Je to uhnízdění nového poznatku ve více oblastech v mysli žáka. M. Hejný uvádí, že: „Krystalizace probíhá permanentně a jejím hlavním cílem je vytvořit dostatečně hustou síť vazeb mezi jednotlivými poznatky.“ ([Hejný 2014], s. 73) Ke krystalizaci tedy dochází již u prvního generického modelu, někdy dokonce i u izolovaných modelů. Krystalizace se prolíná s novými otázkami, tedy s procesem nového poznávání a u některých žáků probíhá permanentně.

Teorie generických modelů může být s úspěchem použita pro koncipování výuky, která je v souladu s principy konstruktivismu.

2.2 Konstruktivistické přístupy, podnětná výuka

Experimentální výuka byla založena na konstruktivistické koncepci vyučování. J. Skalková uvádí, že podle tohoto přístupu se nové vědomosti žáků utvářejí dialogem mezi tím, co již znají, a tím, co jim nově zprostředkovává učitel ([Skalková 2007], s. 114 a 133). Nový poznatek je tedy žákem včleněn do již existujících poznatků. Poznání je budováno aktivitou žáka, přičemž učitel je prostředník, moderátor vytvářející podmínky tohoto procesu. Žák doslova konstruuje své poznání.

M. Hejný zmiňuje, že konstruktivistický edukační styl v matematice znamená, že se žáci na objevování matematiky výrazně podílejí ([Hejný, Kuřina 2009], s. 113). V jiné publikaci M. Hejný uvádí, že v průběhu vzdělávání je podstatné, aby se žákům rodila v myslích matematika ukotvená na již zažitá matematická témata. „Matematické vzdělání by mělo mít smysl a mělo by být užitečné. Mělo by žákům přinášet uspokojení a radost.“ ([Hejný 2014], s. 196)

O tzv. didaktickém konstruktivismu hovoří M. Hejný a F. Kuřina. Jedná se o konstruktivismus přizpůsobený zvláštnostem vyučování matematice a je charakterizován pomocí desatera zásad, jejichž stručná formulace následuje (jejich úplné znění je uvedeno v publikaci ([Hejný, Kuřina 2009], s. 194)):

1. Matematiku chápeme nikoli jako výsledek, tj. definice, věty a důkazy, ale jako specifickou lidskou aktivitu.
2. Podstatnou složkou této aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování.
3. Poznatky (nejen matematické) jsou nepřenosné individuální konstrukty, které vznikají v mysli poznávajícího člověka.
4. Vytváření poznatků je podmíněno zkušenostmi, které si žák přináší z kontaktu s realitou svého života a které má příležitost nabývat i ve škole.
5. Základem matematického vzdělávání konstruktivistického typu je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost, jehož předpoklady jsou tvořivý učitel, dostatek vhodných podnětů a sociální klima třídy příznivé tvořivosti.
6. K rozvoji procesu konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě.
7. Dílčí zkušenosti a poznatky jsou reprezentovány, tříděny, hierarchizovány a strukturovány nejrůznějšími způsoby a vznikají obecnější a abstraktnější pojmy.
8. Značný význam má v konstruktivistickém vyučování komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky.
9. Vzdělávací proces v matematice hodnotíme minimálně ze tří následujících hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky.
10. Vyučování založené na předávání informací nazýváme transmisivním vyučováním. Vyučování založené na poskytování návodů, jak postupovat nazýváme instruktivním vyučováním. Tyto přístupy k vyučování vedou k ukládání informací do paměti, následně v lepším případě k reprodukci, obvykle však k rychlému zapomínání. Toto poznání nazýváme formálním poznáním.

O konstruktivistickém vyučování matematice hovoří také N. Stehlíková. Nazývá jej pro jednoduchost podnětná výuka a charakterizuje pomocí sedmi principů, jimiž se v takto vedené výuce učitel řídí. Přináším jejich znění, vysvětlení a komentáře k nim jsou uvedeny v publikaci ([Stehlíková 2007], s. 16).

1. Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání.
2. Učitel předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy).
3. Učitel podporuje žákovu aktivní činnost.
4. Učitel rozvíjí u žáků schopnost samostatného a kritického myšlení.
5. Učitel nahlíží na chybu jako na vývojové stadium žákova chápání matematiky a impulz pro další práci.
6. Učitel iniciuje a moderuje diskuze se žáky a mezi žáky o matematické podstatě problémů.
7. Učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění.

Při experimentálním vyučování plánuji dodržovat uvedené desatero zásad didaktického konstruktivismu i sedm principů podnětné výuky. Tomu odpovídá plánovaná forma vyučování, která je založena především na diskuzi mezi žáky a mezi žáky a učitelem. Ve vzdělávacím procesu žáků kladu důraz především na aktivní objevování žáků, argumentaci podporující jejich tvrzení a hledání souvislostí. Jako učitel se snažím podporovat zájem žáků o danou problematiku uvedením do podnětného prostředí. Volím vhodné úlohy a otázky, které napomáhají vytvářet tvořivé prostředí, a v tomto prostředí řídím diskuzi za účelem budování matematických schopností žáků. Matematickou chybu považuji za vítaný prvek ve vyučování, se kterým je vhodné tvořivě pracovat. Hodnotím zejména matematické porozumění dané problematice, které zkoumám pomocí diagnostických otázek.

Kapitola 3

Kosinová a sinová věta

V této kapitole popisuji odvození trigonometrických vět, podle něhož se rámcově odvíjela i experimentální výuka. Nejprve odvozuji kosinovou větu a následně větu sinovou. Odlišuji se tak od všech analyzovaných učebnic (kapitola 4), které upřednostňují postup opačný. Důvodem této změny byl záměr odvozovat nejdříve kosinovou větu podnětným způsobem, pro který je důležité, aby žáci neočekávali, že půjde o nějakou goniometrickou funkci. Pokud by nejdříve byla vyučována sinová věta, mohli by být touto skutečností příliš navedeni.

V níže uvedeném textu používám obvyklé značení vrcholů, stran a vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

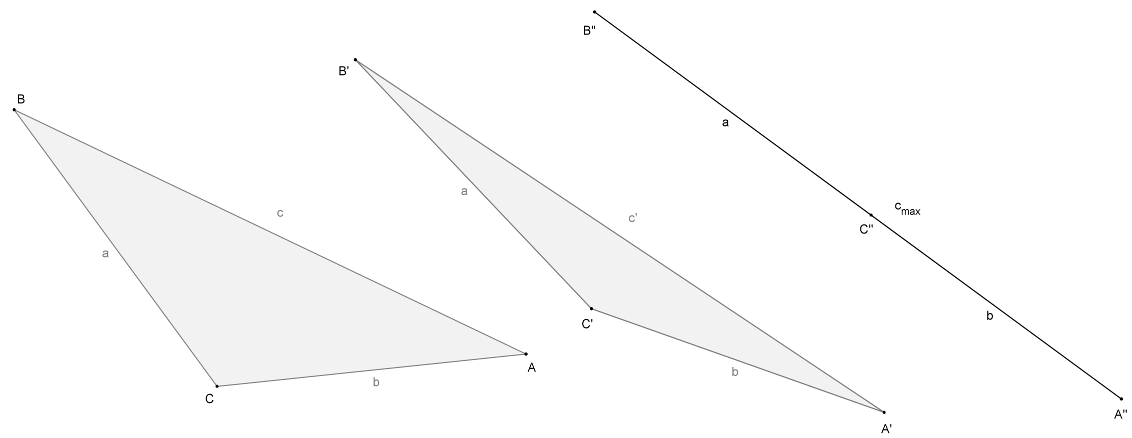
3.1 Kosinová věta

Hlavní myšlenka prezentovaného odvození kosinové věty pochází z kapitoly v knize [Pritchard 2003] (s. 232–236), kterou následně rozpracovávám, a získávám tak nový způsob odvození kosinové věty. Toto odvození je založeno na určitém zobecnění Pythagorovy věty.

Věta 3.1.1 (Pythagorova věta, [Binterová, Fuchs, Tlustý 2009], s. 15) *V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C platí $a^2 + b^2 = c^2$, kde a, b jsou délky odvěsen, c je délka přepony.*

Ptejme se nejprve, zda lze zobecnit tuto větu pro trojúhelníky, které nejsou pravoúhlé. Co můžeme v těchto trojúhelnících říci o c^2 a a^2+b^2? Postupně na základě několika konkrétních tupoúhlých trojúhelníků formulujeme hypotézu, že pro tupoúhlé trojúhelníky s tupým úhlem γ u vrcholu C platí $c^2 > a^2 + b^2$. Tím jsme omezili c^2 zdola a hledejme ještě omezení shora.

Zvětšujeme-li tupý úhel γ ke $180°$ a zachováváme-li velikosti stran a a b, tak se nutně zvětšuje strana c. Tuto měnící se velikost strany trojúhelníku označme c'. Protože se c' s rostoucí velikostí úhlu γ zvětšuje, zvětšuje se i c'^2. Maximální hodnoty nabyde c'^2 pro maximální úhel $\gamma = 180°$, tedy pokud se tupoúhlý trojúhelník změní v úsečku. Zachováme-li velikosti stran a, b trojúhelníku ABC, je délka úsečky c_{max}, v níž se trojúhelník změní, dána součtem $a+b$ (obrázek 3.1).



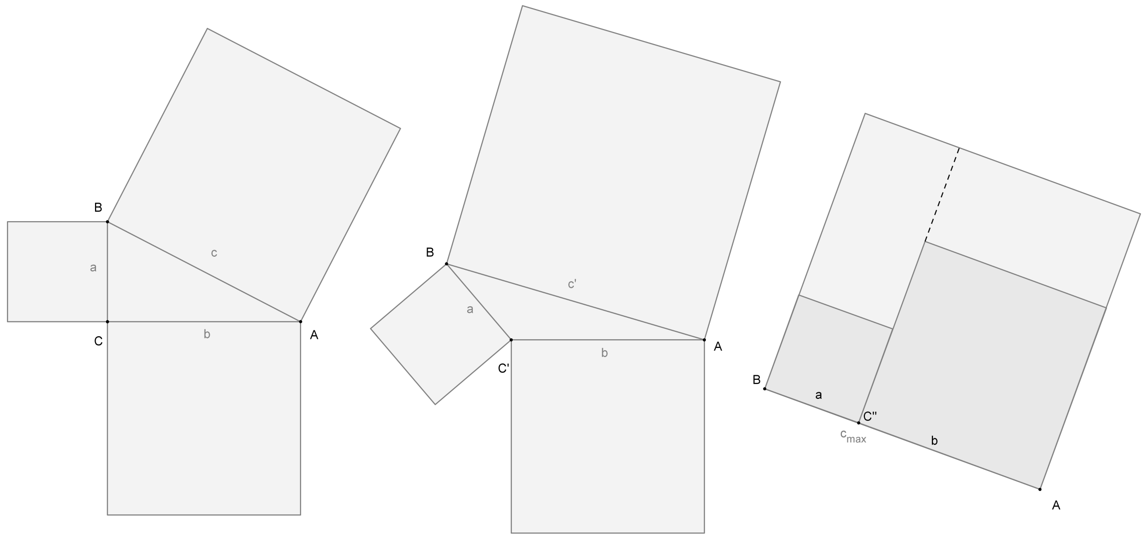
Obrázek 3.1: Obrázek zobrazující postupné změny tupoúhlého trojúhelníku.

Protože $c < c_{max} = a + b$, tak po umocnění dostáváme $c^2 < c_{max}^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Tímto jsme omezili c^2 v trojúhelníku, kde $\gamma \in (90°, 180°)$. Názornější představu získáme z obrázku 3.2, který nám poskytuje grafické zobrazení přechodu od pravoúhlého přes tupoúhlý trojúhelník k úsečce a názorně ukazuje rovnost $c_{max}^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Věta 3.1.2 (Tupý úhel γ) *Pro každý trojúhelník ABC, jehož největší strana má velikost c a velikost vnitřního úhlu u vrcholu C je $\gamma \in (90°, 180°)$, platí*

$$a^2 + b^2 < c^2 < a^2 + 2ab + b^2.$$

Uděláme analogický postup pro trojúhelník, v němž $\gamma \in (0°, 90°)$, a poté zobecníme tato vyjádření c^2 v krajních hodnotách úhlu γ. Opět na základě několika konkrétních trojúhelníků stanovíme hypotézu, že pro tyto trojúhelníky ABC platí $c^2 < a^2+b^2$. Takto jsme omezili c^2 shora a zbývá ještě omezení zdola.



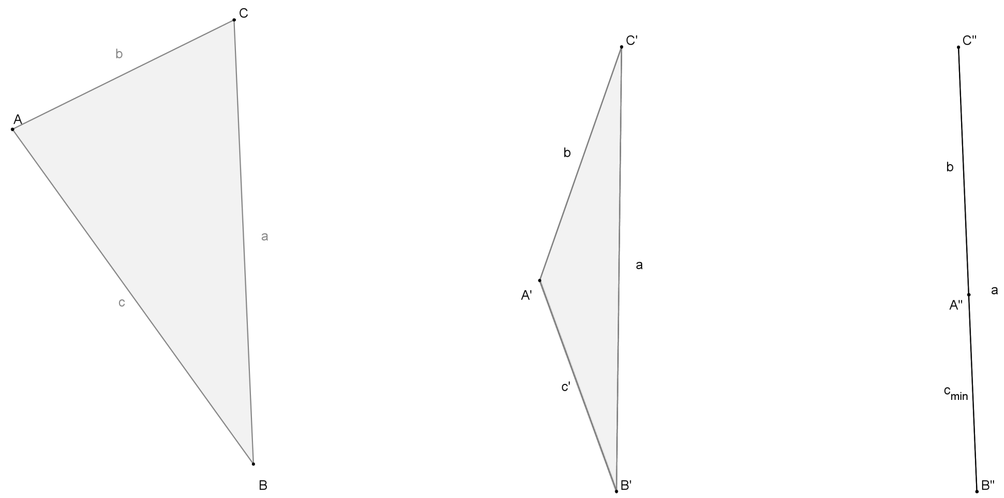
Obrázek 3.2: Obrázek zobrazující odvození omezení c^2 přes tupý úhel γ.

Zmenšujeme-li ostrý úhel γ k $0°$ a zachováváme-li velikosti stran a a b, tak se nutně zmenšuje strana c. Tuto měnící se velikost strany trojúhelníku označme c'. Protože se c' s klesající velikostí úhlu γ zmenšuje, zmenšuje se i c'^2. Minimální hodnoty nabyde c'^2 pro minimální velikost úhlu $\gamma = 0°$, tedy pokud se ostroúhlý trojúhelník změní v úsečku. Zachováme-li velikosti stran a, b trojúhelníku ABC, bez ztráty na obecnosti dejme $a > b$, je délka úsečky a, v níž se trojúhelník změní, dána součtem $b + c_{min}$, kde c_{min} značí minimální velikost strany c (obrázek 3.3).

Tedy $c_{min} = a - b$ a protože $c > c_{min} = a - b$, tak po umocnění dostáváme $c^2 > c_{min}^2 =$ $= a^2 - 2ab + b^2$. Tímto jsme omezili c^2 v trojúhelníku, kde $\gamma \in (0°, 90°)$. Názornější představu získáme z obrázku 3.4, který nám poskytuje grafické zobrazení přechodu od pravého přes ostrý až po nulový úhel γ a názorně ukazuje rovnost $a^2 = b^2+c_{min}^2+2bc_{min}$.

Věta 3.1.3 (Ostrý úhel γ) *Pro každý trojúhelník ABC, jehož největší strana má velikost a, resp. b a velikost vnitřního úhlu u vrcholu C je $\gamma \in (0°, 90°)$, platí*

$$a^2 - 2ab + b^2 < c^2 < a^2 + b^2.$$



Obrázek 3.3: Obrázek zobrazující postupné změny ostroúhlého trojúhelníku.

Na základě těchto odvození lze tedy pro limitní hodnoty c^2 v závislosti na velikosti úhlu γ stanovit následující větu.

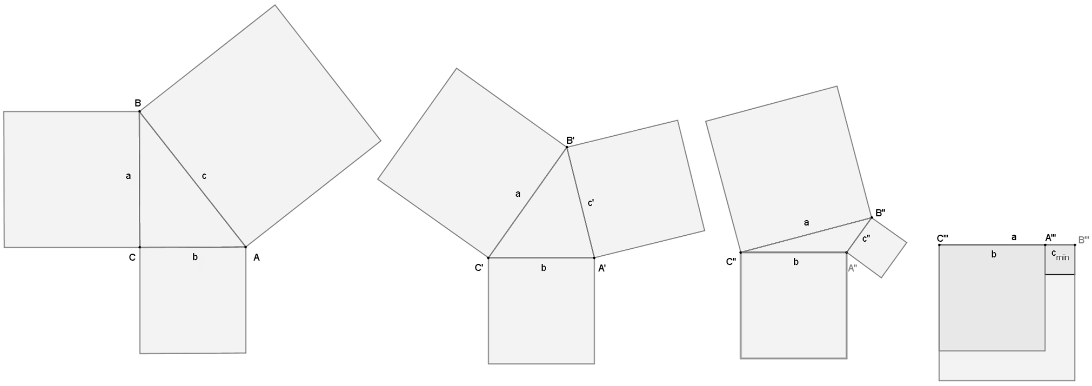
Věta 3.1.4 (Limitní velikosti úhlu γ) *Pro velikosti c^2 v závislosti na velikosti úhlu γ platí*

$$c^2 = \begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab\ldots & \gamma = 0°, \\ a^2 + b^2\ldots\ldots\ldots\ldots & \gamma = 90°, \\ a^2 + b^2 + 2ab\ldots & \gamma = 180°. \end{cases}$$

Když si povšimneme, že velikost c^2 závisí na velikosti úhlu γ a že se podle předchozí věty mění pouze třetí člen součtu ve vyjádření c^2, můžeme zobecnit předchozí zápis na zápis $c^2 = a^2 + b^2 - 2abf(\gamma)$, kde $f(\gamma)$ značí závislost na velikosti úhlu γ. Vyjádřeme z předchozího vztahu $f(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ a z trojúhelníků vypočtěme ze známých parametrů a, b, c a γ několik funkčních hodnot $f(\gamma)$. Zbývá tyto hodnoty ztotožnit s jejich argumenty (tabulka 3.1) a najít hledanou funkční závislost v grafu (obrázek 3.5). Formulujeme domněnku, že $f(\gamma) = \cos\gamma$.

Věta 3.1.5 (Kosinová věta) *Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a jehož vnitřní úhel proti straně AB má velikost γ, platí*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$



Obrázek 3.4: Obrázek zobrazující odvození omezení c^2 přes ostrý úhel γ.

Tabulka 3.1: Předpokládaná tabulka hodnot vypracovaná žáky.

γ	0°	15°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	165°	180°
$f(\gamma)$	1	0,97	0,87	0,71	0,5	0	−0,5	−0,71	−0,87	−0,97	−1

Důkaz 3.1.1 (Kosinová věta) a) Úhel α je ostrý (obrázek 3.6 níže). V pravoúhlém trojúhelníku BPC platí podle Pythagorovy věty

$$a^2 = |CP|^2 + |BP|^2, \tag{3.1}$$

navíc

$$|BP| = c - |AP|. \tag{3.2}$$

V pravoúhlém trojúhelníku APC podle definice goniometrických funkcí ostrého úhlu je

$$|AP| = b\cos\alpha, \tag{3.3}$$

$$|CP| = b\sin\alpha. \tag{3.4}$$

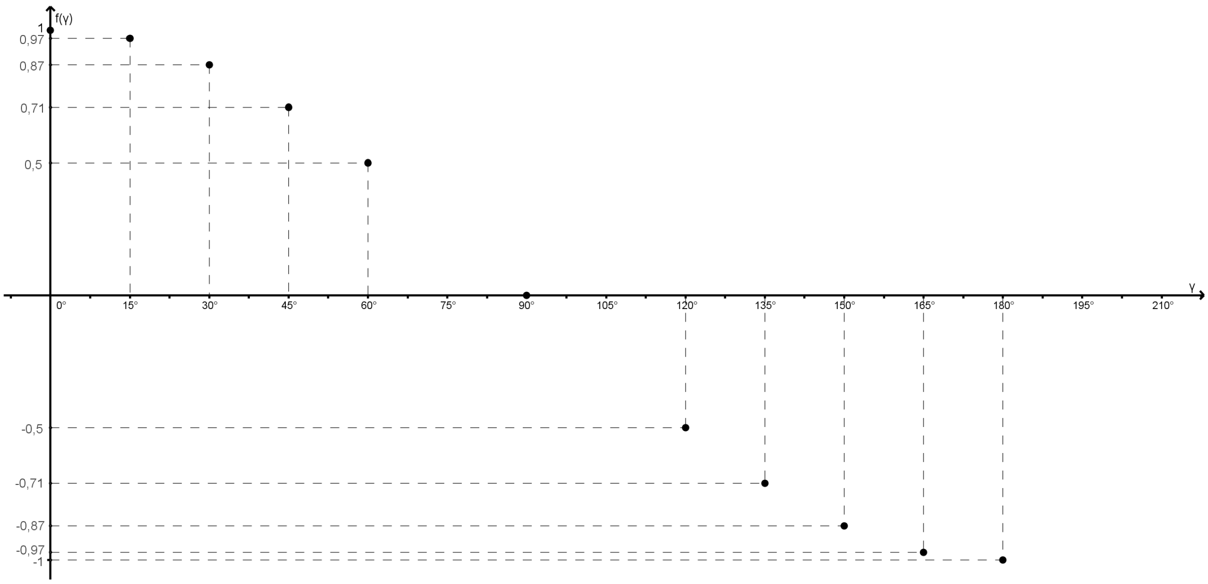
Dosadíme-li vztah (3.3) do (3.2), dostaneme

$$|BP| = c - b\cos\alpha. \tag{3.5}$$

Dosadíme-li vztahy (3.4) a (3.5) do (3.1) a uvědomíme-li si, že $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, dostaneme

$$a^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 = b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha =$$

$$= b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$



Obrázek 3.5: Ilustrace předpokládaného grafického zobrazení tabulky 3.1.

b) Úhel α je pravý (obrázek 3.6 níže). Lze tedy psát, že $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tudíž $\cos\alpha = 0$, a tedy opět platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\,0 = b^2 + c^2,$$

protože se jedná o Pythagorovu větu.

c) Úhel α je tupý (obrázek 3.6 níže). V pravoúhlém trojúhelníku BPC platí podle Pythagorovy věty vztah (3.1), navíc

$$|BP| = c + |AP|. \tag{3.6}$$

V pravoúhlém trojúhelníku APC podle definice goniometrických funkcí je

$$|AP| = b\cos(\pi - \alpha), \tag{3.7}$$

$$|CP| = b\sin(\pi - \alpha). \tag{3.8}$$

Z vlastností grafů goniometrických funkcí nebo z vlastností jednotkové kružnice je zřejmé, že

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha.$$

Vztahy (3.7) a (3.8) lze tedy vyjádřit i takto

$$|AP| = -b\cos\alpha, \tag{3.9}$$

$$|CP| = b \sin \alpha. \tag{3.10}$$

Dosadíme-li vztah (3.9) do (3.6), dostaneme

$$|BP| = c - b \cos \alpha. \tag{3.11}$$

Dosadíme-li vztahy (3.4) a (3.5) do (3.1), dostaneme

$$a^2 = (b \sin \alpha)^2 + (c - b \cos \alpha)^2,$$

což je stejný vztah pro a^2 jako v případě a). Tím je kosinová věta s poukázáním na záměnu písmen dokázána.

3.2 Sinová věta

Inspirace následujícího odvození pochází od M. Hejného, podle kterého je didakticky vhodné nechat žáky za účelem odhalení věty o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku hledat trojúhelník s největším součtem vnitřních úhlů. Zkoumejme konkrétní trojúhelníky ABC, v nichž známe všechny velikosti stran i vnitřních úhlů. Ptejme se, který z poměrů $a : \sin \alpha$, $b : \sin \beta$, $c : \sin \gamma$ je největší. Po několika experimentech objevujeme, že existuje hypotéza, po jejímž dokázání by platila následující věta.

Věta 3.2.1 (Sinová věta) *Pro každý trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany délky a, b, c, platí*

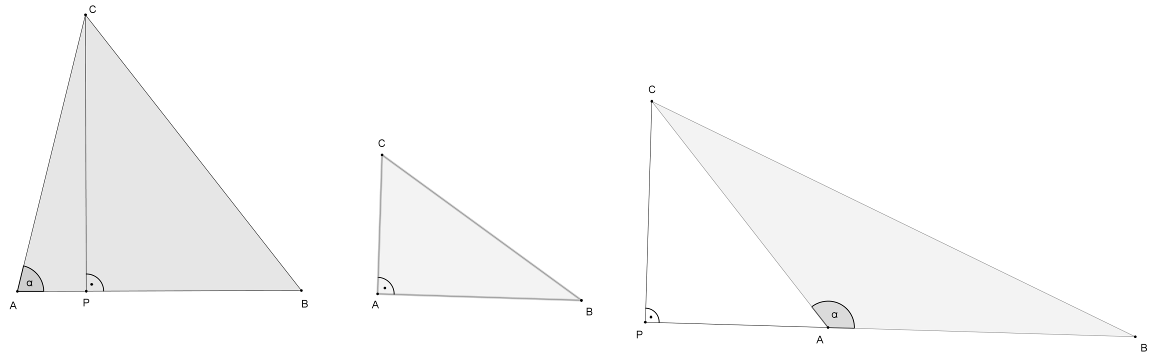
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}. \tag{3.12}$$

Důkaz 3.2.1 (Sinová věta) Velikost výšky na stranu c trojúhelníku ABC vyjádříme jednak pomocí parametrů α, b a jednak pomocí β, a a tato dvě vyjádření porovnáme, z čehož po úpravě obdržíme dokazovaný vztah 3.12.

a) Úhel α je ostrý (obrázek 3.6). Podle definice funkce sinus v pravoúhlých trojúhelnících APC a BPC pro délky výšky v_c na stranu c platí

$$|CP| = b \sin \alpha,$$

$$|CP| = a \sin \beta.$$



Obrázek 3.6: Obrázek ostroúhlého, pravoúhlého a tupoúhlého trojúhelníku ABC z důkazu kosinové i sinové věty.

Porovnáme-li pravé strany těchto vztahů, obdržíme

$$b \sin \alpha = a \sin \beta, \tag{3.13}$$

tedy

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

b) Úhel α je pravý (obrázek 3.6). Bod A splývá s bodem P a tedy výška CP splývá se stranou b, tedy pro výšku CP pravoúhlého trojúhelníku ABC platí

$$|CP| = b = b \sin \frac{\pi}{2} = b \sin \alpha,$$

$$|CP| = a \sin \beta.$$

Celkově tedy opět získáme vztah (3.13).

c) Úhel α je tupý (obrázek 3.6). Z pravoúhlých trojúhelníků APC a BPC vyplývá

$$|CP| = b \sin(\pi - \alpha),$$

$$|CP| = a \sin \beta.$$

Z vlastností grafů goniometrických funkcí nebo z vlastností jednotkové kružnice je zřejmé, že

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha.$$

A tedy opět platí vztah (3.13). Tím je sinová věta s poukázáním na záměnu písmen dokázána.

Kapitola 4

Analýza učebnic

V analýze současných středoškolských učebnic jsem se zaměřil na to, jakým způsobem jsou zkoumané trigonometrické věty zaváděny. Posuzuji zejména míru konstruktivistických prvků jejich odvození podle teorie generických modelů, množství návodných poznámek i smysl úvodních úloh. Jsem si vědom toho, že konstruktivistický přístup se obtížně do učebnic začleňuje, protože je prakticky nemožné odhadnout, jakým způsobem budou žáci uvažovat, pokud dostanou příležitost nad daným tématem bádat. Navíc vždy záleží na konkrétním přístupu učitele, jakým způsobem odvození vět zpřístupní žákům, jaké pokládá otázky a jaké vybírá úlohy. Proto se snažím učebnice posuzovat spíše z toho hlediska, do jaké míry vůbec konstruktivistický způsob vyučování umožňují. Např. pokud text začíná formulovanou větou, po níž následuje její důkaz, pak lze říci, že konstruktivistický přístup učebnice nepodporuje a naopak vede spíše k transmisivnímu přístupu. Pokud text začíná šířeji formulovanými otázkami, žáci jsou vedeni k jejich řešení a to je postupně dovede k formulaci poznatku, pak je učebnice ke konstruktivnímu přístupu vstřícnější.

Zaměřil jsem se na učebnice pro gymnázia, učiliště, střední odborné školy i učebnice pro blíže nespecifikovaný druh střední školy, abych co nejlépe pokryl všechny druhy středních škol. Do výběru jsem zahrnul i elektronickou učebnici M. Krynického a novou učebnici vydavatelství Didaktis, protože se svou formou odlišují od ostatních analyzovaných učebnic (jak bude ukázáno níže).

4.1 Matematika pro gymnázia. Goniometrie

V této učebnici ([Odvárko 2007], s. 100–115) navazuje kapitola o trigonometrii na kapitolu o trigonometrických vzorcích a kapitolu o goniometrických funkcích. Na počátku kapitoly je popsáno, čím se trigonometrie zabývá včetně historických poznámek.

4.1.1 Sinová věta

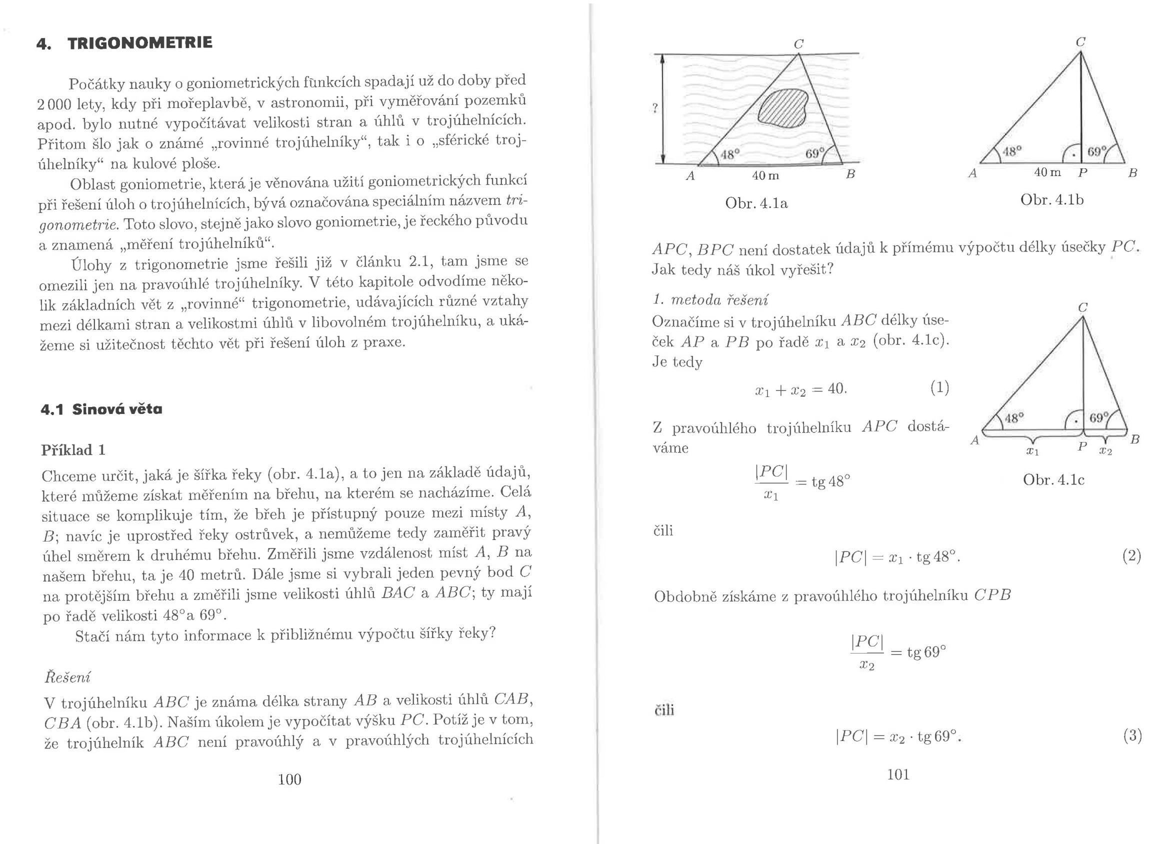
Oddíl začíná aplikační úlohou řešenou dvěma metodami obsahujícími komentáře jednotlivých úprav i numerické řešení. Protože je řešení úlohy značně rozsáhlé, uvádím ho formou naskenovaných stránek na obrázku 4.1 a 4.2. Názorné předvedení náročnosti obou metod vede k potřebě zavést sinovou větu, což je v učebnici zmíněno. O. Odvárko poukazuje na konkrétní vztah $40 \cdot \sin 48° = |BC| \cdot \sin 63°$, který je součástí druhé metody. Tato rovnost je následně upravena do tvaru poměrů a sinová věta je uvedena jako zmíněná věta 3.2.1. Sinová věta, jakožto abstraktní poznatek, je tedy odvozena z jedné úlohy, z jediného izolovaného modelu. Zcela chybí další izolované modely a generický model. Ty jsou budovány zpětně v úlohách. Následně je věta dokázána pro všechny typy trojúhelníků podobně jako důkaz 3.2.1, od kterého se odlišuje v používání součtových vzorců pro úpravu výrazu $\sin(\pi - \alpha)$.

Autor vyřeší úvodní úlohu pomocí sinové věty. Dále je uvedena sinová věta ve tvaru

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}. \tag{4.1}$$

Vysvětlení poměrů je tučně zdůrazněno s poznámkou, že se tento tvar často v řešení úloh využívá. Domnívám se, že není nutné jej uvádět, když lze sinovou větu takto upravit. Autor pokračuje návodem, v jakých případech sinovou větu používat; je-li dána velikost jedné strany a dvou úhlů, nebo velikost dvou stran a úhlu proti jedné z nich. Předepisuje tedy žákům pravidlo, kdy mohou sinovou větu použít, aby se nemuseli zabývat případy, kdy to nelze. Domnívám se, že žáci by dokázali tyto zákonitosti objasnit sami na základě svých znalostí a zkušeností.

Autor navazuje dvěma řešenými úlohami (řešení trojúhelníku, známe-li velikosti jedné strany a úhlů k ní přilehlých, respektive velikosti dvou stran a úhlu proti větší z nich), obsahující komentáře jednotlivých úprav i numerická řešení. Ve druhé úloze upozorňuje na dvě řešení rovnice $\sin\gamma \doteq 0,7060$. Nesmyslnost řešení $\gamma_2 \doteq 135°02'$ odůvodňuje jednak větou o součtu velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku, jednak úvahou $\gamma_2 > \alpha \Rightarrow c > a$, jejíž závěr je ve sporu se zadáním ($c < a$). Po vyřešení úlohy pokračuje autor poznámkou o dvojznačnosti velikosti úhlu určeného funkcí sinus. Podává stejný návod na rozhodnutí o počtu řešení jako v předešlé úloze. Domnívám se, že tyto návodné instrukce není vhodné žákům prozrazovat, naopak úvahy a diskuze žáků ubírající se tímto směrem by měly být součástí vyučování. Autor nezmiňuje souvislost s větami o shodnosti trojúhelníků. Poznámky k této problematice uvádím v oddíle 5.7.1. O. Odvárko zakončuje oddíl množstvím různorodých úloh, jejichž náročnost graduje.



4. TRIGONOMETRIE

Počátky nauky o goniometrických funkcích spadají už do doby před 2 000 lety, kdy při mořeplavbě, v astronomii, při vyměřování pozemků apod. bylo nutné vypočítávat velikosti stran a úhlů v trojúhelnících. Přitom šlo jak o známé „rovinné trojúhelníky“, tak i o „sférické trojúhelníky“ na kulové ploše.

Oblast goniometrie, která je věnována užití goniometrických funkcí při řešení úloh o trojúhelnících, bývá označována speciálním názvem *trigonometrie*. Toto slovo, stejně jako slovo goniometrie, je řeckého původu a znamená „měření trojúhelníků“.

Úlohy z trigonometrie jsme řešili již v článku 2.1, tam jsme se omezili jen na pravoúhlé trojúhelníky. V této kapitole odvodíme několik základních vět z „rovinné“ trigonometrie, udávajících různé vztahy mezi délkami stran a velikostmi úhlů v libovolném trojúhelníku, a ukážeme si užitečnost těchto vět při řešení úloh z praxe.

4.1 Sinová věta

Příklad 1

Chceme určit, jaká je šířka řeky (obr. 4.1a), a to jen na základě údajů, které můžeme získat měřením na břehu, na kterém se nacházíme. Celá situace se komplikuje tím, že břeh je přístupný pouze mezi místy A, B; navíc je uprostřed řeky ostrůvek, a nemůžeme tedy zaměřit pravý úhel směrem k druhému břehu. Změřili jsme vzdálenost míst A, B na našem břehu, ta je 40 metrů. Dále jsme si vybrali jeden pevný bod C na protějším břehu a změřili jsme velikosti úhlů BAC a ABC; ty mají po řadě velikosti 48°a 69°.

Stačí nám tyto informace k přibližnému výpočtu šířky řeky?

Řešení

V trojúhelníku ABC je známa délka strany AB a velikosti úhlů CAB, CBA (obr. 4.1b). Naším úkolem je vypočítat výšku PC. Potíž je v tom, že trojúhelník ABC není pravoúhlý a v pravoúhlých trojúhelnících

100

Obr. 4.1a

Obr. 4.1b

APC, BPC není dostatek údajů k přímému výpočtu délky úsečky PC. Jak tedy náš úkol vyřešit?

1. metoda řešení

Označíme si v trojúhelníku ABC délky úseček AP a PB po řadě x_1 a x_2 (obr. 4.1c). Je tedy

$$x_1 + x_2 = 40. \tag{1}$$

Obr. 4.1c

Z pravoúhlého trojúhelníku APC dostáváme

$$\frac{|PC|}{x_1} = \mathrm{tg}\,48°$$

čili

$$|PC| = x_1 \cdot \mathrm{tg}\,48°. \tag{2}$$

Obdobně získáme z pravoúhlého trojúhelníku CPB

$$\frac{|PC|}{x_2} = \mathrm{tg}\,69°$$

čili

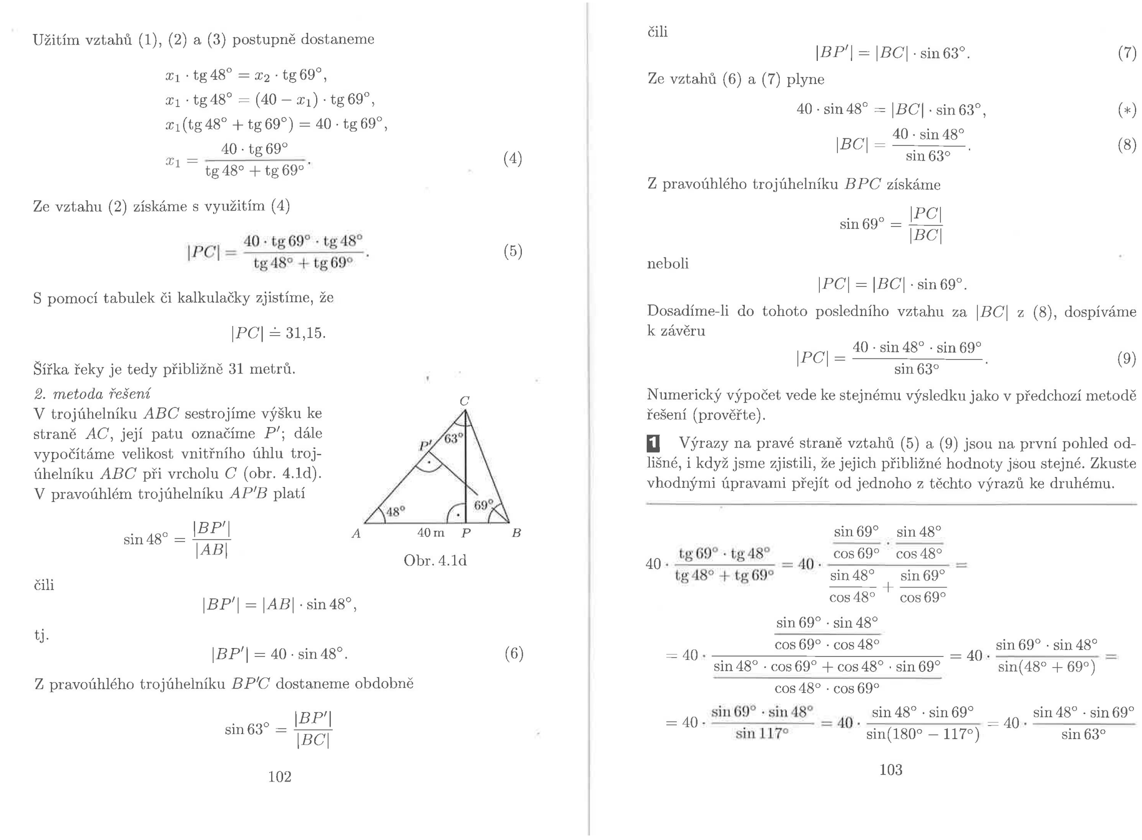
$$|PC| = x_2 \cdot \mathrm{tg}\,69°. \tag{3}$$

101

Obrázek 4.1: Oskenovaná část učebnice – zadání úlohy a první metoda řešení.

4.1.2 Kosinová věta

Tento oddíl následuje po sinové větě. Nejprve autor zopakuje návod, kdy lze užít sinovou větu. V následné motivaci kosinové věty zmiňuje autor jednoznačnost trojúhelníků určených pomocí vět *sss* a *sus*, které nelze vyřešit pomocí sinové věty. Ihned poté zavádí kosinovou větu v podobném znění jako věta 3.1.5. Před zavedením této věty tedy zcela chybí izolované modely. Čtenáři je předložen abstraktní poznatek a izolované modely jsou dobudovány zpětně. Následně je věta dokázána pro všechny typy trojúhelníků podobně jako důkaz 3.2.1, od kterého se odlišuje používáním součtových vzorců.



Užitím vztahů (1), (2) a (3) postupně dostaneme

$$x_1 \cdot \operatorname{tg} 48^\circ = x_2 \cdot \operatorname{tg} 69^\circ,$$
$$x_1 \cdot \operatorname{tg} 48^\circ = (40 - x_1) \cdot \operatorname{tg} 69^\circ,$$
$$x_1(\operatorname{tg} 48^\circ + \operatorname{tg} 69^\circ) = 40 \cdot \operatorname{tg} 69^\circ,$$
$$x_1 = \frac{40 \cdot \operatorname{tg} 69^\circ}{\operatorname{tg} 48^\circ + \operatorname{tg} 69^\circ}. \qquad (4)$$

Ze vztahu (2) získáme s využitím (4)

$$|PC| = \frac{40 \cdot \operatorname{tg} 69^\circ \cdot \operatorname{tg} 48^\circ}{\operatorname{tg} 48^\circ + \operatorname{tg} 69^\circ}. \qquad (5)$$

S pomocí tabulek či kalkulačky zjistíme, že

$$|PC| \doteq 31{,}15.$$

Šířka řeky je tedy přibližně 31 metrů.

2. metoda řešení
V trojúhelníku ABC sestrojíme výšku ke straně AC, její patu označíme P'; dále vypočítáme velikost vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C (obr. 4.1d). V pravoúhlém trojúhelníku $AP'B$ platí

$$\sin 48^\circ = \frac{|BP'|}{|AB|}$$

Obr. 4.1d

čili

$$|BP'| = |AB| \cdot \sin 48^\circ,$$

tj.

$$|BP'| = 40 \cdot \sin 48^\circ. \qquad (6)$$

Z pravoúhlého trojúhelníku $BP'C$ dostaneme obdobně

$$\sin 63^\circ = \frac{|BP'|}{|BC|}$$

102

čili

$$|BP'| = |BC| \cdot \sin 63^\circ. \qquad (7)$$

Ze vztahů (6) a (7) plyne

$$40 \cdot \sin 48^\circ = |BC| \cdot \sin 63^\circ, \qquad (*)$$
$$|BC| = \frac{40 \cdot \sin 48^\circ}{\sin 63^\circ}. \qquad (8)$$

Z pravoúhlého trojúhelníku BPC získáme

$$\sin 69^\circ = \frac{|PC|}{|BC|}$$

neboli

$$|PC| = |BC| \cdot \sin 69^\circ.$$

Dosadíme-li do tohoto posledního vztahu za $|BC|$ z (8), dospíváme k závěru

$$|PC| = \frac{40 \cdot \sin 48^\circ \cdot \sin 69^\circ}{\sin 63^\circ}. \qquad (9)$$

Numerický výpočet vede ke stejnému výsledku jako v předchozí metodě řešení (prověřte).

1 Výrazy na pravé straně vztahů (5) a (9) jsou na první pohled odlišné, i když jsme zjistili, že jejich přibližné hodnoty jsou stejné. Zkuste vhodnými úpravami přejít od jednoho z těchto výrazů ke druhému.

$$40 \cdot \frac{\operatorname{tg} 69^\circ \cdot \operatorname{tg} 48^\circ}{\operatorname{tg} 48^\circ + \operatorname{tg} 69^\circ} = 40 \cdot \frac{\frac{\sin 69^\circ}{\cos 69^\circ} \cdot \frac{\sin 48^\circ}{\cos 48^\circ}}{\frac{\sin 48^\circ}{\cos 48^\circ} + \frac{\sin 69^\circ}{\cos 69^\circ}} =$$
$$= 40 \cdot \frac{\frac{\sin 69^\circ \cdot \sin 48^\circ}{\cos 69^\circ \cdot \cos 48^\circ}}{\frac{\sin 48^\circ \cdot \cos 69^\circ + \cos 48^\circ \cdot \sin 69^\circ}{\cos 48^\circ \cdot \cos 69^\circ}} = 40 \cdot \frac{\sin 69^\circ \cdot \sin 48^\circ}{\sin(48^\circ + 69^\circ)} =$$
$$= 40 \cdot \frac{\sin 69^\circ \cdot \sin 48^\circ}{\sin 117^\circ} = 40 \cdot \frac{\sin 48^\circ \cdot \sin 69^\circ}{\sin(180^\circ - 117^\circ)} = 40 \cdot \frac{\sin 48^\circ \cdot \sin 69^\circ}{\sin 63^\circ}$$

103

Obrázek 4.2: Oskenovaná část učebnice – první a druhá metoda řešení.

Po důkazu uvádí autor zbylé dvě podoby kosinové věty, které vzniknou záměnou odpovídajících si písmen. Dvakrát kurzívou zdůrazňuje, že úhel obsažený ve vyjádření kosinové věty je protilehlý. Domnívám se, že jak záměna písmen, tak poznatek o protilehlém úhlu není vhodné explicitně zmiňovat, nýbrž ponechat k objevení žákům.

Následují dvě řešené úlohy (řešení trojúhelníku, známe-li velikosti dvou stran a úhlu jimi sevřeného, resp. velikosti třech stran), které jsou opatřeny komentáři jednotlivých úprav, přičemž první i numerickými výpočty. Autor pokračuje poznámkou, v níž porovnává vhodnost použití obou vět. Zde opět nabádá k postupům, které by žáci podle mého názoru měli objevit sami. „Raději však počítáme pomocí věty sinové, protože numerický výpočet je snadnější. ... při užití sinové věty počítáme nejdříve velikost úhlu ležícího proti dané kratší straně, který je určitě ostrý." ([Odvárko 2007], s. 114) Jak ukázala i moje vlastní výuka (oddíl 5.6.13), první citovaná věta je individuální záležitost. Druhou větu považuji za svazující instrukci, která odvádí pozornost od kritického nahlížení počtu řešení tím, že se problematice více řešení vyhýbá. Oddíl končí množstvím úloh, jejichž náročnost graduje. Nechybí úloha důkazová ani úloha propojující kosinovou větu s dřívější látkou. Toto propojení se objevuje i v aplikačních úlohách, jimž je věnován samostatný oddíl.

4.1.3 Shrnutí

Z matematického hlediska je učebnice korektní. Matematika je vybudovaná formálně (věta – důkaz). Řešené úlohy nezmiňují možnost jiných postupů řešení a svými vysvětlujícími komentáři neposkytují žádný prostor pro objevování. Neřešené úlohy jsou dostatečně různorodé, i co se týče počtu řešení. Ve všech úlohách používá autor pouze tradiční označení trojúhelníku pomocí písmen a, b, c. Lze říci, že text nevybízí k podnětné výuce. Kromě zmíněné motivace zde totiž nenalezneme dostatečný počet izolovaných modelů, z nichž by si žáci mohli vybudovat generický model. Žákům je ihned sdělen abstraktní poznatek. V převážné většině textu se jedná o výklad, instruktivní poznámky a doporučení k řešení úloh, které mohou žáci převzít bez porozumění, protože se na jejich konstrukci nijak nepodíleli.

4.2 Matematika pro tříleté učební obory středních odborných učilišť, 3. díl

V této učebnici ([Calda 2004], s. 113–119) navazuje oddíl o sinové a kosinové větě na oddíly zabývající se goniometrickými funkcemi. Na počátku tohoto oddílu nalezneme shrnutí historie trigonometrie a zdůvodnění zavedení sinové a kosinové věty.

4.2.1 Sinová věta

Část o sinové větě začíná jejím odvozením. Nejprve je v trojúhelníku ABC vyznačena výška v_c a stejným způsobem jako v důkazu 3.2.1 je odvozen vztah $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Následuje analogický postup s výškou v_a. Zde se autor dopustil chyby, když vztahy $\sin\gamma = \frac{v_a}{b}$, $\sin\beta = \frac{v_a}{c}$ přepsal do vztahu $\frac{b}{\sin\gamma} = \frac{c}{\sin\beta}$. Na rozdíl od gymnaziální učebnice [Odvárko 2007] se E. Calda neodkazuje na záměnu písmen, ale odvozuje dvakrát stejný vztah. Závěrem autor uvádí, že v trojúhelníku ABC platí vztah 3.12. Samotné odvození je zakončeno sdělením, že jsme dosud používali jen ostroúhlý trojúhelník, a autor nabádá k přesvědčení, že věta funguje i u ostatních typů trojúhelníků. Matematický obsah odvození je až na uvedenou chybu v pořádku. Z hlediska teorie generických modelů se jedná o abstraktní poznatek vzniklý bez izolovaných modelů, které jsou budovány až zpětně.

Sinová věta je uvedena ve tvaru: „V každém trojúhelníku o stranách a, b, c a s úhly α, β, γ platí: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.“ ([Calda 2004], s. 114) Nejedná se o matematicky přesné vyjadřování, protože bez obrázku nevíme, k čemu značení náleží. Následuje poznámka, že z tohoto vztahu vyplývají vztahy 4.1, jejichž význam je okomentován slovně. K těmto vztahům jsem se vyjádřil v oddíle 4.1.1.

Autor pokračuje několika poznámkami. V první tučně zdůrazňuje, za jakých okolností sinovou větu používáme, v čemž se shoduje s gymnaziální učebnicí. Druhá upozorňuje na souvislost s větami o shodnosti, *usu* a *Ssu*. Tím se od gymnaziální učebnice odlišuje, nicméně po didaktické stránce to nepovažuji za vydařené. K důvodům jsem se vyjádřil v oddíle 5.7.1. V úlohách chybí typ „dvě strany a úhel proti menší z nich“, o kterém se pouze hovoří. Třetí poznámka se týká nutnosti provádět kontrolu pomocí věty o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku a pomocí úvahy zmíněné v oddíle 4.1.1. K těmto poznámkám jsem se vyjádřil v oddíle 4.1.1.

Následují dvě řešené úlohy velmi podobné úlohám z gymnaziální učebnice, o nichž jsem psal v oddíle 4.1.1. Některé pasáže jsou příliš instruktivní: „... uvědomte si, že úhel γ leží proti větší z daných stran; znamená to, že úloha má jediné řešení.“ ([Calda 2004], s. 116)

4.2.2 Kosinová věta

Oddíl začíná odvozením kosinové věty, které se shoduje s částí a) důkazu 3.1.1. Autor v závěru odvození nabádá žáky, aby se přesvědčili, že platí i zbylá dvě vyjádření kosinové věty a že tato věta platí i pro ostatní typy trojúhelníků. Matematický obsah odvození je bezchybný. Podle teorie generických modelů se jedná o abstraktní poznatek bez vazby na izolované modely. Oceňuji prostor poskytnutý žákům pro ověřování daných tvrzení.

Kosinovou větu uvádí autor ve tvaru: „V každém trojúhelníku pro délku c jeho libovolné strany platí: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, kde a, b jsou délky zbývajících stran a γ je velikost úhlu jimi sevřeného.“ ([Calda 2004], s. 117) Záměna písmen je skryta v sousloví „libovolné strany“. Autor pokračuje poznámkou, v níž prozradí žákům shodnost kosinové a Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku včetně odvození. Domnívám se, že na tuto souvislost by mohli žáci přijít sami stejně jako uvedené vymezení případů používání kosinové věty. Poznámky se podobají gymnaziální učebnici stejně jako následující dvě řešené úlohy. Oddíl končí množstvím neřešených úloh.

4.2.3 Shrnutí

Z matematického hlediska zvolil autor místo formálního přístupu (věta – důkaz) odvozování vět. Složitost odvozování vyvažuje postupnými kroky a komentáři úprav. O řešených úlohách a označení trojúhelníků platí totéž, co jsem psal v oddíle 4.1.2, navíc tu jsou návody, jak používat kalkulačku, což považuji za přínosné. Neřešené úlohy mají vždy právě jedno řešení. Po didaktické stránce se tato učebnice od gymnaziální příliš neodlišuje. Chybí konstruktivistické prvky při zavádění vět, dostatečný počet izolovaných modelů, generický model a text je pojat jako výklad s instruktivními poznámkami.

4.3 Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 3. díl

V této učebnici ([Calda 2005], s. 89–103) předchází oddílu sinové věty oddíl zabývající se trigonometrickým vzorcem pro obsah trojúhelníku, v němž je trigonometrie zasazena do historického kontextu. Současně je zde popsán záměr řešit obecný trojúhelník.

4.3.1 Sinová věta

Její odvození vychází přímo ze vzorce pro obsah trojúhelníku ABC $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. V poznámce předchozího oddílu autor zmiňuje, že lze vybrat jakékoliv strany, čímž zdůvodňuje vztahy $\frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, $\frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, $\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta$. Z těchto rovností prý lze snadno odvodit vztahy $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ apod. To nemusí být zřejmé vzhledem k absenci mezikroků úprav. Na závěr vyvození autor poznamenává, že platí vztah 3.12. Matematicky je toto odvození korektní.

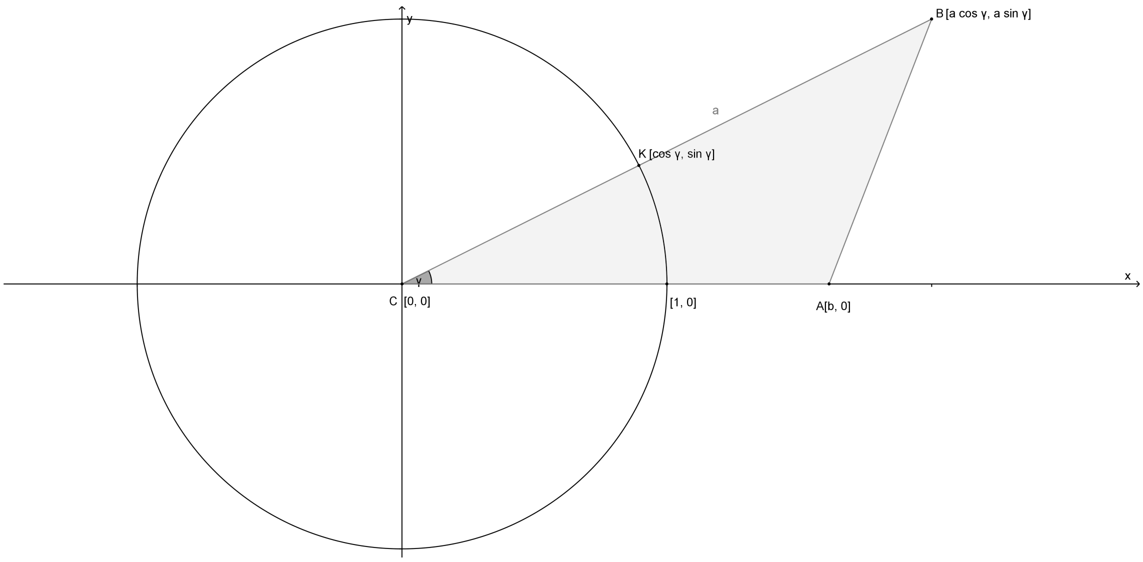
Autor uvádí sinovou větu ve tvaru: „V každém trojúhelníku s délkami stran a, b, c a s velikostmi protilehlých úhlů α, β, γ platí $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$“ ([Calda 2005], s. 89), který se liší od obou výše zmíněných učebnic jen v jistých maličkostech. Po tomto zavedení komentuje autor druhé vyjádření sinové věty ve tvaru vztahů 4.1 včetně jejich vzniku z rovností vyjadřujících obsah trojúhelníku ABC. K těmto vztahům jsem se vyjádřil v oddíle 4.1.1.

Následují dvě řešené úlohy podobné úlohám z gymnaziální učebnice, o nichž jsem psal v oddíle 4.1.1. Jediný rozdíl spočívá v rozboru úloh, v nichž autor důsledně zmiňuje příslušné věty o shodnosti. Autor navazuje opakováním upozornění na nutnost rozhodnout o počtu řešení při výpočtu velikosti úhlu pomocí sinové věty. Objevení této nutnosti bych raději přenechal žákům. Autor pokračuje aplikační úlohou na sinovou větu, jež se podobá úloze č. 31 z učebnice ([Calda 2004], s. 120). Ve zbytku tohoto oddílu vykládá autor učivo, jež není součástí této práce.

4.3.2 Kosinová věta

Oddíl začíná shrnutím, za jakých okolností lze řešit trojúhelník sinovou větou. Autor na rozdíl od gymnaziální učebnice nezmiňuje věty o shodnosti. Následné odvození kosinové věty využívá znalostí jednotkové kružnice, stejnolehlosti a vzorce pro vzdálenost dvou bodů. Zvolme libovolný trojúhelník ABC a umístěme jej do kartézské soustavy souřadnic podle obrázku 4.3. Průsečík jednotkové kružnice se středem v počátku má se stranou a trojúhelníku ABC průsečík K. Jak víme z goniometrie, souřadnice bodu K jsou $[\cos\gamma, \sin\gamma]$. Protože je bod B obrazem bodu K ve stejnolehlosti se středem v počátku a koeficientem a, tak souřadnice bodu B jsou $[a\cos\gamma, a\sin\gamma]$. Pomocí vzorce pro vzdálenost dvou bodů AB vyjádříme délku strany $c = |AB| = \sqrt{(a\cos\gamma - b)^2 + (a\sin\gamma)^2}$. Úpravami a umocněním docházíme k rovnosti $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Jedná se o obtížný postup z důvodu využívání poznatků z mnoha oblastí matematiky. Znění kosinové věty se shoduje se zněním v učebnici [Calda 2004] stejně jako poznámka o souvislosti mezi kosinovou a Pythagorovou větou. Autor pokračuje dvěma úlohami, které jsou podobné úlohám z gymnaziální učebnice, opět s tím rozdílem, že jsou zde přímo zmíněny věty o shodnosti. Zbytek oddílu se zabývá aplikační úlohou a odvozením Heronova vzorce pomocí kosinové věty.



Obrázek 4.3: Obrázek k odvození kosinové věty.

4.3.3 Shrnutí

Po matematické stránce se jedná o korektní učebnici, v níž jsou věty vyvozovány. Způsob těchto vyvození je neobvyklý, odlišný od ostatních učebnic a přináší čtenáři jiný vhled do problematiky. Řešené úlohy nezmiňují možnost jiných postupů řešení a svými vysvětlujícími komentáři neposkytují žádný prostor pro objevování. Ve všech úlohách používá autor pouze tradiční označení trojúhelníku pomocí písmen a, b, c. Lze říci, že text nevybízí k podnětné výuce. Nenalezneme zde totiž dostatečný počet izolovaných modelů, z nichž by si žáci mohli vybudovat generický model.

4.4 Matematika www.realisticky.cz

V této elektronické učebnici ([Krynický 2015]) předchází kapitole o trigonometrii kapitola o goniometrických rovnicích a vzorcích a kapitola o goniometrických funkcích. Kapitola je rozčleněna do čtyř vyučovacích hodin, které se nazývají Sinová věta, Kosinová věta, Další trigonometrické věty a Trigonometrie v praxi. Analyzujeme první dvě hodiny. Na rozdíl od učebnic popsaných výše jsou v učebnici M. Krynického uvedeny tzv. pedagogické poznámky osvětlující, jak by měla být hodina vedena, co ponechat na žácích, jaké mohou mít obtíže apod. Proto jsem také schopen analyzovat zamýšlený způsob výuky detailněji.

4.4.1 Sinová věta

Hodina začíná motivací prostřednictvím vysvětlení triangulace, praktické aplikace trigonometrie. Následně se čtenář dočte: „Trojúhelníky nejsou obecně pravoúhlé ⇒ zatím je nedokážeme dopočítat ⇒ musíme najít vzorce pro obecné trojúhelníky“ ([Krynický 2015], Sinová věta, s. 1). M. Krynický pokračuje poznámkou o Pythagorově větě a definicích goniometrických funkcí a dodává: „zkusíme najít jejich obdoby pro obecný trojúhelník.“ ([Krynický 2015], Sinová věta, s. 1)

V rozporu s citovanou větou je pokračování, jímž je znění sinové věty, které je shodné s větou 3.2.1. Autor předkládá hotový abstraktní poznatek, jemuž nepředchází žádné izolované modely, ani zmíněné „hledání“. Věta je na rozdíl od klasických učebnic dokázána až později. Po znění sinové věty následují pokyny pro numerické výpočty, které se týkají přesnosti výpočtů.

V šesti řešených numerických úlohách se autor zaměřuje na procvičování sinové věty. V prvních dvou úlohách je trojúhelník určen pomocí věty usu. Řešení třetí úlohy (trojúhelník zadaný dvěma stranami a úhlem proti menší z nich) zahrnuje pouze jednu možnost. V závěru je zdůrazněno, že uvedené řešení není správné, a také jsou zde uvedeny parametry druhého trojúhelníku, který splňuje zadání. Čtvrtá úloha se zabývá ověřením platnosti tohoto druhého řešení a nalezením chyby pomocí jednotkové kružnice. Pátá úloha shrnuje obě řešení předchozích dvou úloh. Šestá úloha zahrnuje trojúhelník určený podle věty Ssu. Neexistence druhého řešení je zdůvodněna dopočítáním velikosti třetího vnitřního úhlu s dovětkem, že záporný úhel není možný.

Obsahem sedmé až deváté úlohy je důkaz sinové věty. Umístění důkazu po šesti numerických úlohách napovídá, že na něj v rámci jedné vyučovací hodiny nemusí dojít. Důkaz se podobá důkazu 3.2.1. Záměnu písmen autor zdůvodňuje nezávislostí zvoleného označení stran trojúhelníku. V posledních dvou úlohách je vysvětlena záměna písmen pomocí termínu cyklická záměna. Autor končí hodinu poznámkou, v níž uvádí slovní variantu sinové věty.

4.4.2 Kosinová věta

Hodina začíná v rámci první úlohy otázkou, jestli jsou žáci schopni řešit všechny trojúhelníky. Autor nedává tuto problematiku do souvislosti s větami o shodnosti trojúhelníků, nýbrž rozvádí následující úvahu pomocí dvojice strana – protější úhel: „Bez jedné dvojice strana-protější úhel počítat pomocí sinové věty nemůžeme $\Rightarrow$ všechny prvky trojúhelníku zatím nedokážeme dopočítat, když známe všechny tři strany a žádný úhel, nebo dvě strany a úhel proti třetí straně.“ ([Krynický 2015], Kosinová věta, s. 1) Druhá úloha se zabývá vyhledáním kosinové věty v Tabulkách a vyřešením trojúhelníku, který je zadán pomocí věty *sus*. Autor nabízí dvě možnosti, jak provést záměnu písmen. První je rozbor významu stran a úhlů v kosinové větě, druhá je použití schémat cyklické záměny. Kloním se k první variantě, která, v případě, že ji objeví žáci, podporuje pochopení kosinové věty. Numerické řešení úlohy zahrnuje dva postupy vypočítání velikosti druhého úhlu v trojúhelníku, čímž se liší od klasických učebnic. Pravdivost řešení ověřuje autor pomocí sinové věty, o které tvrdí, že je snazší do ní dosazovat, ovšem za bezpečnější považuje větu kosinovou. Podle mého názoru se jedná o individuální záležitost.

V následující úloze požaduje autor zápis kosinové věty ve třech variantách. Řešení uvádějící všechny tři varianty chybně tvrdí, že: „Kosinová věta umožňuje určit stranu čtverce pomocí zbývajících stran a protějšího úhlu“ ([Krynický 2015], Kosinová věta, s. 3). V další úloze je za úkol uvědomit si větu pro pravoúhlý trojúhelník, která má vztah ke kosinové větě. Následuje odvození a komentář tohoto vztahu. Autor pokračuje dodatkem, v němž rozvádí znaménko členu, jímž se kosinová věta odlišuje od Pythagorovy věty. Pro tupoúhlý a ostroúhlý trojúhelník stanovuje změny délky strany c v závislosti na velikosti úhlu γ při zachování délek stran a, b. Zvětšíme-li úhel γ v trojúhelníku ABC z původních 90°, přejde výpočet strany c z Pythagorovy věty na kosinovou větu. Tato změna je vyjádřena výrazem $-2ab\cos\gamma$, a protože pro tupý úhel γ je $\cos\gamma < 0$, tak celý tento výraz je kladný, a proto se velikost strany c zvětší. Tuto souvislost dále dokládá obrázkem a analogicky postupuje pro ostrý úhel γ. S touto souvislostí jsem se nesetkal v žádné klasické učebnici. Poslední řešená úloha je úloha na trojúhelník zadaný třemi stranami. V závěru autor uvádí důkaz podobný důkazu 3.1.1.

4.4.3 Shrnutí

Jedná se o matematicky korektní učebnici. Autor upřednostňuje rychlé sdělení vět žákům s následným důrazem na numerické úlohy. Žákům je ihned sdělen abstraktní poznatek. Učebnice obsahuje pouze řešené úlohy, na neřešené úlohy odkazuje do sbírky. Řešené úlohy zmiňují možnost dvou postupů řešení, z nichž jedno autor upřednostňuje, což mi nepřipadá vhodné (oddíl 4.1.2). Ve všech úlohách používá autor pouze tradiční označení trojúhelníku pomocí písmen a, b, c. Lze říci, že text nevybízí k podnětné výuce. Nenalezneme zde totiž dostatečný počet izolovaných modelů, z nichž by si žáci mohli vybudovat generický model.

4.5 Matematika pro střední školy – 5. díl: Funkce II – Učebnice

V této učebnici ([Vondra 2014], s. 84–88) předchází kapitole o sinové a kosinové větě kapitola o goniometrických funkcích, rovnicích a nerovnicích.

4.5.1 Sinová věta

Oddíl začíná zněním sinové věty ve tvaru zmíněném v oddíle 4.3.1, které je slovně okomentováno. J. Vondra pokračuje komentovaným uvedením věty ve tvaru 4.1, které je analyzováno v oddíle 4.1.1. Autor uvádí odvození sinové věty v ostroúhlém trojúhelníku, nechávaje odvození v ostatních typech trojúhelníků na žáky. Dále se zabývá podmínkami použití sinové věty, které jsem komentoval v oddíle 4.1.1. Autor navíc prozradí, co lze z daných parametrů vypočítat. Dále ve čtyřech krocích předepisuje postup při řešení úloh pomocí sinové věty včetně diskuze o počtu řešení v závislosti na typu úlohy. Stejně jako elektronická učebnice M. Krynického zdůrazňuje dvojici strana – protilehlý úhel a navíc nabádá k využívání vhodných rovností mezi dvěma zlomky. Z rámečku Pozor se dovíme, že pokud je trojúhelník určen dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným, nelze sinovou větu použít. Domnívám se, že tyto instrukce jsou z analyzovaných učebnic nejvíce návodné.

Autor navazuje čtyřmi řešenými úlohami. Každá z nich je doplněna komentářem, který představuje a zdůvodňuje celé postupy včetně počtu řešení. Podle mého názoru jsou tyto obsáhlé komentáře příliš instruktivní a neponechávají prostor pro vlastní přemýšlení žákům. Rámečky, umístěné po straně, připomínají starší učivo planimetrie (věta o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku, platnost Pythagorovy věty, počet řešení při konstrukci trojúhelníku), jiné prozrazují souvislosti sinové věty s Pythagorovou větou a jiné se zabývají úvahou o větším vnitřním úhlu proti delší straně. Domnívám se, že otázky by byly lepší formou než sdělení této učebnice. Autor upozorňuje na libovolné označení trojúhelníků: „V každém zlomku v definici se vyskytuje vždy podíl délky strany trojúhelníku a hodnoty funkce sinus protilehlého vnitřního úhlu bez ohledu na jejich označení.“ ([Vondra 2014], s. 86) K tomu dodávám, že sinová věta je tvrzení, nikoliv definice.

4.5.2 Kosinová věta

Oddíl začíná jejím zněním, které se jen v maličkostech odlišuje od věty 3.1.5. Autor dodává, že strany a úhly je možné přeznačit, a využívá k tomu schéma cyklické záměny. Uvádí i zbylá dvě vyjádření kosinové věty. Kosinová věta je představena jako hotový produkt s chybějící motivací pro její zavedení. Podobně jako u sinové věty uvádí autor použití kosinové věty, o čemž jsem psal výše. Autor připomíná dřívější učivo trojúhelníkové nerovnosti a Pythagorovy věty. Prozradí žákům, že Pythagorova věta je speciálním případem kosinové věty. Na žácích ponechá pouze zdůvodnění tohoto tvrzení. Tím se odlišuje od předchozích učebnic, které zdůvodnění uvádějí buď v poznámce, v důkazu nebo v rámci úlohy. Za důležité považuji, když si žáci uvědomí vztah mezi těmito dvěma větami sami. Autor předepisuje postup při řešení trojúhelníku pomocí kosinové věty. Nabádá žáky k použití tvaru kosinové věty, v níž vystupuje úhel, který známe nebo chceme vypočítat. Stejně jako u sinové věty považuji tento popis postupu za příliš návodný.

Oddíl pokračuje dvěma řešenými úlohami doplněnými vyčerpávajícími komentáři. V rámečcích po straně se dočteme různé souvislosti, které bych raději ponechal k objevení žákům. První rámeček upozorňuje, že úhel vystupující v kosinové větě je protilehlý vzhledem ke straně na druhé straně rovnosti. Druhý zmiňuje, že při řešení úloh obvykle používáme obě trigonometrické věty. Další rámeček prozrazuje, že trojúhelníky zadané dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich lze řešit i kosinovou větou. Autor uvádí jednu úlohu a rozebírá možný počet řešení v závislosti na tom, je-li trojúhelník zadán jednoznačně. S tímto přístupem jsem se v předchozích učebnicích nesetkal. Žáci by na tuto možnost výpočtu měli přijít sami, což se při experimentální výuce potvrdilo (oddíl 5.6.13). Poslední dva rámečky vybočují tím, že ponechávají prostor žákům, kteří mají rozhodnout, proč se při řešení goniometrických rovnic omezujeme na interval $(0°, 180°)$ a jakými dalšími způsoby kromě kosinové věty lze dopočítat velikosti dvou vnitřních úhlů, známe-li všechny ostatní parametry trojúhelníku.

V závěru oddílu nalezneme v rámečku kvízové otázky, které jsou zaměřeny na porozumění probrané látky. Nic podobného jsem nenalezl v žádné jiné učebnici. Považuji tyto otázky za vhodné, budou-li sloužit jako zpětná vazba ohledně diagnostiky porozumění žáků. Domnívám se, že by neměly sloužit jako učební text pro osvojení zpaměti.

4.5.3 Shrnutí

Tato učebnice se od ostatních v mnohém odlišuje. Na první pohled v grafickém zpracování, které je svou barevností a rámečky ojedinělé. Druhý pohled zaznamená odlišnost v obsahu látky, protože zde poměrně často nalézáme opakování předchozího učiva. Třetí pohled nám umožní postřehnout odlišnosti v samotné trigonometrii. Učebnice je bohatší na poznámky a postupy, jak řešit úlohy, a naopak chudší, co se matematické stránky týče. Chybí například důkaz kosinové věty. Kladně hodnotím přítomnost otevřených otázek, zejména otázky ohledně jiných možností postupů řešení úloh, protože neobsahuje odpověď ani upřednostnění jednoho postupu. Za didakticky vhodné považuji netradiční označení trojúhelníku v jedné úloze. Autor dává důraz na řešené numerické úlohy, neřešené zde nenajdeme. Po didaktické stránce se učebnice neodlišuje, protože zavedení trigonometrických vět postrádá motivaci, izolované a generické modely. Žákům je ihned sdělen abstraktní poznatek. V převážné většině textu se jedná o výklad, instruktivní poznámky a doporučení k řešení úloh, které mohou žáci převzít bez porozumění, protože se na jejich konstrukci nijak nepodíleli. Nevybízí tedy k podnětné výuce.

Kapitola 5

Experimentální výuka

V této kapitole se budu věnovat přípravě, realizaci a vyhodnocení experimentální výuky obou trigonometrických vět.

5.1 Rámcový popis metodologie

Jak jsem již uvedl, cílem mé práce je naplánovat, provést a zhodnotit výuku kosinové a sinové věty na střední škole. Dalším cílem je upravit plán pro výuku těchto trigonometrických vět.

Zvolil jsem metodu experimentální výuky, kterou jsem realizoval na Křesťanském gymnáziu v Praze – Hostivaři, kde mi škola umožnila vyučovat ve druhém ročníku čtyřletého gymnázia a v sextě osmiletého gymnázia. Výuku jsem zaznamenával na statickou videokameru umístěnou a na diktafon a záznamy na tabuli jsem fotografoval. Dále jsem si pořizoval terénní poznámky z průběhu hodin i po jejich skončení a od žáků získal kopie některých jejich prací. Další informace o realizované výuce jsem získal od paní učitelky, která se účastnila některých mých hodin.

Získaná data jsem podrobil analýze s cílem zjistit, do jaké míry se mi podařilo realizovat podnětnou výuku a jaké asi měla účinky na porozumění žáků problematice. Celý proces níže podrobněji popíšu.

5.2 Příprava obsahu výuky a zvolený výukový přístup

Podrobná příprava vychází z rámcového odvození obou vět popsaného v kapitole 3.

Cíl úkolu	Úkol	Očekávaná činnost učitele	Očekávaná činnost žáků
zopakování a shrnutí základních vlastností trojúhelníků	zmínění známých vlastností pravoúhlého a libovolného trojúhelníku	načrtnutí trojúhelníků, vyvolávání žáků a zapisování vlastností	přemýšlení a aktivní zapojení se do opakování
motivace pro úpravu Pythagorovy věty	„Lze upravit Pythagorovu větu, aby platila v libovolném trojúhelníku?“	poukázání na minimální znalost vlastností libovolného trojúhelníku	
izolované modely – konkrétní hodnoty trojúhelníků	vyplnění pracovního listu (obrázek 5.1)	obcházení žáků	měření, dopočítání a zapsání prvních pěti sloupců pracovního listu
vysledování závislosti mezi znaménkem a velikostí největšího vnitřního úhlu trojúhelníku	rozhodnutí o znaménku mezi výrazy c^2 a $a^2 + b^2$ pro jisté skupiny trojúhelníků	vyvolávání žáků a zapsání výsledků	na základě izolovaných modelů objevení této závislosti
vyjádření c^2 pro limitní velikosti úhlu γ	omezení c^2 shora i zdola pro oba typy trojúhelníků	načrtnutí obrázků, pokládání podnětných dotazů, řízení diskuze a shrnutí výsledků	experimentování ve dvojicích nad nákresy trojúhelníků, diskuze se spolužáky a zapsání řešení úkolu žákem na tabuli

Cíl úkolu	Úkol	Očekávaná činnost učitele	Očekávaná činnost žáků
odhalení závislosti c^2 na velikosti úhlu γ	zobecnění vztahu pro c^2	pokládání návodných otázek a řízení diskuze	diskuze se spolužáky a odhalení vztahu $c^2 = a^2+b^2-2abf(\gamma)$
objevení dosud neznámé funkce $f(\gamma)$	vytvoření tabulky funkčních hodnot funkce jako předstupeň pro sestavení jejího grafu, tvorba grafu a určení funkce	navedení k tabulce, nabádání k doplnění pracovního listu (obrázek 5.1), obcházení žáků, pomáhání s tvorbou grafu a řízení diskuze ohledně tvaru funkce	samostatné doplnění pracovního listu, vyjádření neznámé funkce ze vztahu, skupinové vypočítání funkčních hodnot, vytvoření grafu na tabuli a diskuze se spolužáky o tvaru funkce
dokázání hypotézy kosinové věty	důkaz pro jeden typ trojúhelníků	vedení rámce důkazu a dotazování se žáků po jednotlivých krocích důkazu	přemýšlení o jednotlivých částech důkazu a jeho zapisování
diagnostika porozumění kosinové větě	zodpovězení dotazů na platnost kosinové věty, vyjádření kosinové věty v nezvykle značeném trojúhelníku, vztah mezi kosinovou a Pythagorovou větou	pokládání dotazů, řízení diskuze a shrnutí myšlenek	přemýšlení o problémech a diskuze se spolužáky

Cíl úkolu	Úkol	Očekávaná činnost učitele	Očekávaná činnost žáků
využití kosinové věty v aplikačních úlohách	vyřešení některé úlohy z učebnice zahrnující pojmy výškový a hloubkový úhel	zadání úlohy, obcházení žáků a dopomáhání k výsledku	řešení úlohy samostatně nebo ve skupinách
motivace tématu trigonometrie		výklad historických poznámek souvisejících s trigonometrií	
motivace hledání další trigonometrické věty	zadání úlohy, již nelze vyřešit pomocí kosinové věty	načrtnutí úlohy a řízení diskuze o nemožnosti vyřešení této úlohy	řešení úlohy a diskuze se spolužáky
poukázání na nemožnost záměny goniometrických funkcí	rozhodnutí, zda platí $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sin\gamma$	nastolení problému a vedení diskuze	dosazení hodnoty pravého úhlu a porovnání výsledku s Pythagorovou větou
hypotéza sinové věty	nalezení největšího z poměrů $a : \sin\alpha$, $b : \sin\beta$, $c : \sin\gamma$	rozdělení žáků do skupin, zadání úlohy, obcházení skupin, vedení referátu vyvolané skupiny a následné diskuze v rámci celé třídy	vypočítání poměrů pro daný trojúhelník, referát dané skupiny před třídou, diskuze se spolužáky o nepřesnostech, slovní vyjádření sinové věty a následný algebraický zápis téhož

Cíl úkolu	Úkol	Očekávaná činnost učitele	Očekávaná činnost žáků
dokázání hypotézy sinové věty	důkaz pro jeden typ trojúhelníků	vedení rámce důkazu a dotazování se žáků po jednotlivých krocích důkazu	přemýšlení o jednotlivých částech důkazu a jeho zapisování
poukázání na smysluplnost nově objevené věty	dokončení nevyřešené úlohy	obcházení žáků a shrnutí myšlenek	aplikace sinové věty na dořešení dané úlohy
diagnostika pochopení sinové věty	zodpovězení dotazů na platnost sinové věty, vyjádření sinové věty v neobvykle označeném trojúhelníku, vztah mezi sinovou a kosinovou větou	pokládání dotazů, řízení diskuze a shrnutí myšlenek	přemýšlení o problémech a diskuze se spolužáky
ukázání využití sinové věty v aplikační úloze	vyřešení úlohy zahrnující pojem zorný úhel, smysluplnost druhého řešení	zadání úlohy, obcházení žáků, dopomáhání k výsledku a veden diskuze o smysluplnosti druhého řešení	řešení úlohy samostatně nebo ve skupinách a diskuze se spolužáky
procvičování trigonometrických vět	řešení úloh z učebnice	zadání úloh, obcházení žáků, vedení referátu žáků u tabule a následné shrnutí	aktivní zapojení do řešení úloh a jejich prezentace před spolužáky

Jak již bylo řečeno, rozhodl jsem se experimentální výuku realizovat podnětným způsobem, tedy plánoval jsem dodržet principy desatera konstruktivismu i sedm principů podnětné výuky (kapitola 2).

5.3 Třídy, v nichž byla realizována experimentální výuka

Škola mi umožnila realizovat výuku obou vět dvakrát, a sice současně ve druhém ročníku a v sextě. Žáci obou tříd byli přibližně stejně staří. Žáci druhého ročníku navštěvovali gymnázium druhým rokem a žáci sexty šestým rokem. Obě třídy navštěvovalo okolo třiceti žáků, nicméně z důvodu absence se přítomnost žáků pohybovala kolem dvaceti pěti. Ve druhém ročníku byli výraznými žáky Honza a Irena, naopak v sextě se žádný „tahoun“ nenašel. Žáci obou tříd byli zvyklí na transmisivní přístup k vyučování, který upřednostňovala jejich paní učitelka. Žáky jsem před vlastní experimentální výukou neznal, nicméně s kázní jsem problémy neměl.

5.4 Stručný popis realizace výuky

Následující tabulka přehledně shrnuje průběh výuky v obou třídách.

Datum	Druhý ročník – pořadí hodiny výuky; téma; číslo hodiny během dne	Sexta – pořadí hodiny výuky; téma; číslo hodiny během dne
19.3.	1.; opakování – seznamovací hodina; 3.	–
20.3.	2.; zobecnění Pythagorovy věty pro tupoúhlé trojúhelníky; 2.	1.; opakování – seznamovací hodina; 6.
23.3.	3.; vyjádření c^2 pro limitní velikosti úhlu γ; 6.	2.; vyjádření c^2 pro limitní velikosti úhlu γ; 2.
24.3.	–	3.; objev funkce kosinus, kosinové věty a její důkaz; 8.
25.3.	4.; objev funkce kosinus a kosinové věty; 1.	4.; diagnostika kosinové věty a objev sinové věty; 4.

26.3.	5.; diagnostika kosinové věty a objev sinové věty; 3.	–
27.3.	6.; diagnostika sinové věty a porovnání obou vět; 2.	5.; diagnostika sinové věty, porovnání obou vět a aplikační úloha; 6.
30.3.	7.; aplikační úloha a řešení úloh pomocí obou vět; 6.	6.; řešení úloh pomocí obou vět; 2.
31.3.	–	7.; řešení úloh pomocí obou vět; 8.
7.4.	–	8.; písemná práce; 8.
8.4.	8.; písemná práce; 1.	9.; opakování trigonometrie; 4.

V obou paralelkách jsem odučil jednu hodinu ještě před experimentální výukou, abych se seznámil s třídou a třída se mnou. V této hodině jsme se zabývali opakováním. Hodina se tedy ještě netýkala trigonometrie obecného trojúhelníku. Zabývali jsme se goniometrickými rovnicemi a opakovali jsme grafy goniometrických funkcí. Tato první hodina není součástí popisu.

Při hodinách žáci používali běžné pomůcky zahrnující pravítko, úhloměr a kalkulačku za účelem vyplnění pracovního listu. Nepoužívali žádné učebnice. Dále jsem poskytl žákům k dispozici vyplněnou tabulku s parametry trojúhelníků z pracovního listu a pracovní list s úlohami (oddíl 5.5.16).

Jelikož se v textu potřebuji odkazovat na učitelku a žáky konkrétně, zavedl jsem pro každého pseudonym. Žáci jsou pojmenováváni pomocí svého křestního jména. Paní učitelce, která na experimentální výuku dohlížela, jsem určil pseudonym Mgr. Černá. Práce obsahuje přepisy komunikace z experimentální výuky. V některých případech probíhala komunikace pomocí jazyka algebry. Pro srozumitelnost přepisuji znění těchto výroků algebraicky, nikoliv foneticky, jak byly řečeny. Zbylé výroky přepisuji kvůli autentičnosti beze změn včetně hovorového jazyka.

Nejdříve popíšu výuku ve druhém ročníku a poté v sextě. Popis budu strukturovat podle toho, co bylo cílem té které části experimentální výuky. V rámci popisu budu výuky také částečně reflektovat, tedy budu uvádět i poznámky o tom, zda byla ta která činnost účinná a jaké byly možné příčiny chování žáků. Nakonec výuku zhodnotím z hlediska principů podnětné výuky a navrhnu opravenou přípravu pro výuku obou vět. Vycházím přitom z dat, která jsem popsal v oddíle 5.1.

5.5 Výuka ve druhém ročníku

5.5.1 Vlastnosti trojúhelníků

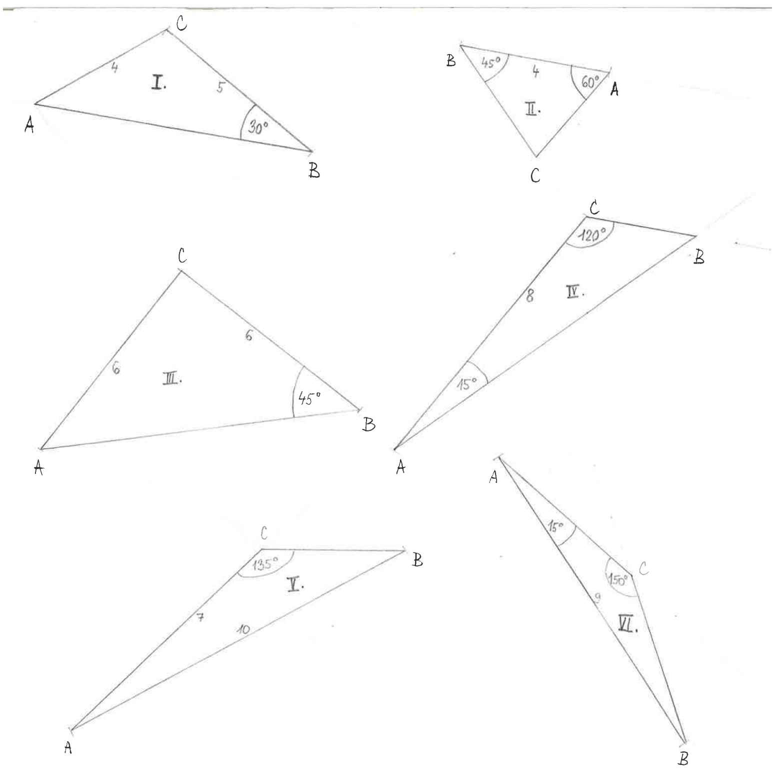
Na druhé hodině ve druhém ročníku jsem, po určitých technicko-organizačních záležitostech, kdy jsem komentoval nahrávání hodiny, načrtnul na tabuli pravoúhlý a vedle něj obecný trojúhelník, aniž bych je popisoval. Načež jsem se zeptal na vlastnosti pravoúhlého a obecného trojúhelníku. Žáky to zřejmě motivovalo, protože okamžitě mi sdělovali své myšlenky a já jsem je zapisoval pod daný obrázek trojúhelníku. Nejprve se objevil poznatek o součtu velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku, následovala Pythagorova věta, kterou jsem zapsal jako $c^2 = a^2 + b^2$, díky čemuž jsem musel pravoúhlý trojúhelník popsat. Pro zjednodušení odvozování kosinové věty jsem pro zápis Pythagorovy věty úmyslně zvolil tradiční písmena. Potom žáci zmínili goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku, věty o shodnosti trojúhelníků a nakonec i trojúhelníkovou nerovnost. Postěžoval jsem si, že o obecném trojúhelníku nemáme takové bohaté znalosti jako o pravoúhlém, a poprvé jsem zmínil, že bychom chtěli zobecnit Pythagorovu větu, aby platila i pro obecný trojúhelník, detailněji v oddíle 5.7.1.

5.5.2 Příprava izolovaných modelů

Následně jsem rozdal pracovní listy (obrázek 5.1). Vysvětlil jsem jejich smysl a žáci se pustili do samostatné práce. Žáci měli za úkol změřit a zapsat některé délky stran a, b, c šesti trojúhelníků, následně pak vypočítat velikosti c^2 a $a^2 + b^2$. Našli se žáci, kteří nevěděli, co dělat a někteří nechápali smysl této činnosti. Jedna žákyně dokonce tvrdila, že údaje nechce měřit, požadovala vzoreček a chtěla to vypočítat. Komentuji to v oddíle 5.7.1. Mnoho žáků vyplňovalo i sloupce týkající se vnitřních úhlů trojúhelníku, přestože jsem je upozornil na to, že je nepotřebují.

5.5.3 Závislost na velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku

Jakmile se žáci s vyplňováním pracovního listu chýlili ke konci, vyzval jsem je, aby porovnali c^2 a $a^2 + b^2$, což jsem napsal dvakrát vedle sebe na tabuli. Zeptal jsem se jich, co pro tyto dva výrazy platí a jaké znaménko lze mezi ně napsat. Někteří žáci pochopili, co jsem po nich chtěl, a porovnání konkrétních veličin z jejich pracovních listů pro ně nebylo složité. Dále jsem se tázal: „Je něco větší, nebo co je menší, co je větší? Nebo je to stejné? Nebo je to vždycky jinak?“ Odpověděla mi jedna žákyně: „Nó, je to vždycky jinak.“ Žáci s tím souhlasili, čili zatím neviděli závislost znaménka na velikosti největšího vnitřního úhlu trojúhelníku. Komentář k této problematice popisuji v oddíle 5.7.1.



	a	b	c	c^2	a^2+b^2	α	β	γ
I.	5	4					30°	
II.			4			60°	45°	
III.	6	6					45°	
IV.		8				15°		120°
V.		7	10					135°
VI.			9			15°		150°

Obrázek 5.1: Pracovní list rozdaný žákům v počáteční fázi experimentální výuky.

Pokračoval jsem: „Lze tam najít nějaké pravidlo?“ Po chvilce diskuze se ozval žák Honza, který očividně ztratil nit: „Ještě jednou, jaká byla otázka?“ Odvětil jsem následovně: „Otázka byla, jestli lze porovnat to c^2 a to $a^2 + b^2$. Co je větší, co je menší? Co mezi to můžu napsat za znaménko? Jestli tam můžu napsat větší, že c^2 je větší, menší anebo že je stejné. To se právě ptáme, jak se změní ta Pythagorova věta pro libovolný trojúhelník.“

Tímto dlouhým zopakováním jsem zřejmě v Honzovi probudil zájem: „No, když je c^2 větší, tak je tam tupej úhel.“ Třídu i mě tato věta povzbudila. Jak mi ve své reflexi napsala Mgr. Černá: „Žáci se mezi sebou baví, ale diskutují řešení, baví se k tématu.“

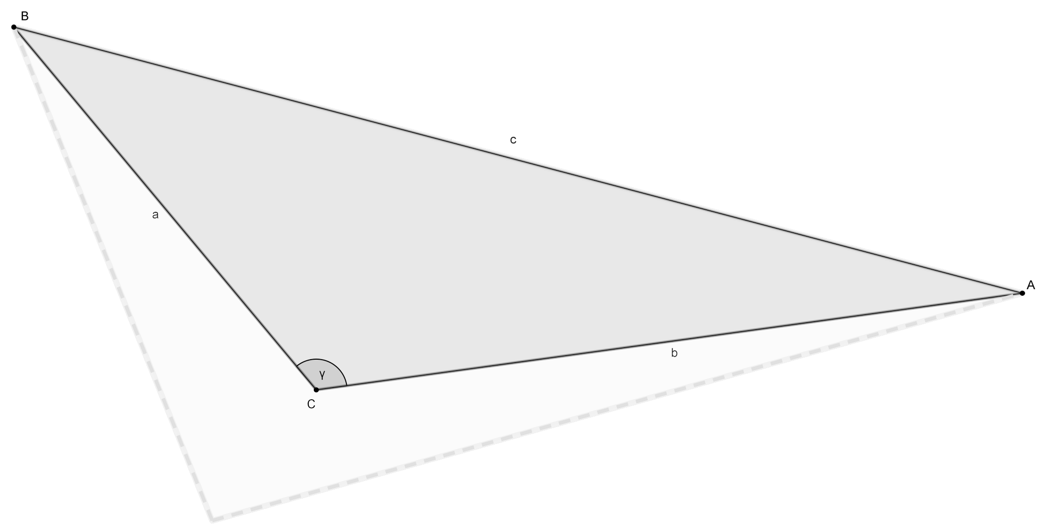
Vzápětí Honza vysvětloval cosi své spolužačce, a já se tedy pro upřesnění dotázal, jestli platí, že když je c^2 větší, tak se jedná o tupoúhlý trojúhelník. Honza naprosto souhlasil, přičemž polovina třídy diskutovala, polovina poslouchala a dívala se do pracovního listu. Odpovědi na otázku, jestli to platí pro všechny ty tupoúhlé trojúhelníky, jsem se nedočkal, nicméně žákům bylo zřejmé, že pro ostroúhlý platí opačná nerovnost.

5.5.4 Omezení c^2 v tupoúhlém trojúhelníku

V souladu s přípravou jsem se dále ptal, jestli má c^2 nějaké omezení, jak moc velké může být atd. Honza řekl něco v tom smyslu, že záleží na délkách stran trojúhelníku. Znovu jsem se tázal, jestli to má nějaké omezení, a pokud ne, tak jestli poroste c^2 do nekonečna. Žáci si uvědomili, že hodnota c^2 musí být konečná, měl jsem tedy zdůvodnění, že lze c^2 určitým způsobem vyjádřit, což jsem také zmínil, že je v našem zájmu. Zadal jsem podle plánu žákům načrtnout tupoúhlý trojúhelník, sám jsem jej načrtnul a popsal na tabuli. „Budeme se ho snažit, ten trojúhelník, převést na nějakou, nějaký jiný obrazec, u kterého bysme dokázali vyjádřit to c^2. Tak máte nějaké nápady, jak ten trojúhelník změnit?“ V podstatě ihned zazněl kosodélník. Možné zdůvodnění je popsáno v oddíle 5.7.1.

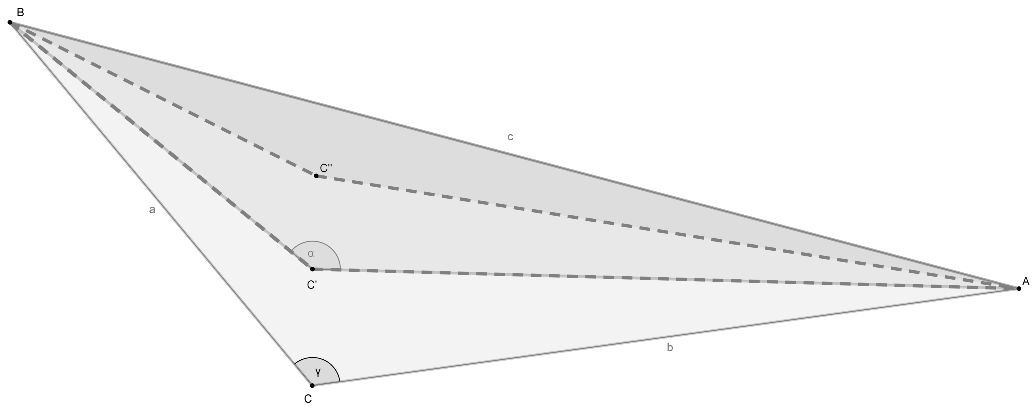
Zeptal jsem se raději jinak: „Jak ten trojúhelník trošku pozměnit, aby ta strana c pokud možno zůstala zachována tak, jak je?“ Vyvolal jsem k tabuli Irenu, která hovořila o těžnici, přičemž měla na mysli výšku. Chtěla předělat tupoúhlý trojúhelník na pravoúhlý s odvěsnou c. Když jsem ji upozornil, že nezná zbylé dvě strany nově vzniklého trojúhelníku, doplnila jej na obdélník. Ozval se Honza, který zřejmě viděl situaci geometricky: „To je rovnou lepší udělat čtverec a máš to c^2.“ Také to ale ukazuje, že přesně nevěděl, oč jsme se snažili. Dokládá to jeho následná otázka: „Ještě jsem se chtěl zeptat – co teda po nás chcete?“ Zopakoval jsem, že naším záměrem je vyjádřit c^2 a zatím jsme se dostali k obdélníku. Irena podotkla, že by chtěla uplatnit Pythagorovu větu, ale bylo zřejmé, že její úvahy tímto končily. Proto ji pořád zajímaly obdélníky, čtverce a pravoúhlé trojúhelníky. Aniž bych Honzu vyvolal k tabuli, přišel Ireně na pomoc. Zbytku třídy se však naše diskuze nelíbila, hluk se neúměrně zvýšil, a musel jsem proto tuto fázi ukončit.

Přikročil jsem k otázce: „Jak zvětšit ten úhel γ, aby ta strana c zůstala stejná? Samozřejmě, že ten trojúhelník můžete změnit, můžete změnit jeho obsah toho trojúhelníka. Jediná podmínka je, aby ta strana c zůstala stejná.“ Postupoval jsem tak podle přípravy, od obecných otázek ke konkrétnějším a návodnějším. Po chvilce se do diskuze přidal žák Richard: „Když přece budu posouvat stranu b a stranu a, tak se mi zvětší úhel u C a zůstane strana c.“ Vyzval jsem jej, aby to nakreslil na tabuli. Richard se chopil pravítka a změnil načrtnutý tupoúhlý trojúhelník na jiný tupoúhlý trojúhelník, přičemž zachoval stranu c a zmenšil úhel γ (obrázek 5.2). Pochopil tedy princip, onu změnu trojúhelníku, jen ji provedl opačně. Ponechal jsem třídu, aby zkontrolovala jeho řešení, a vzápětí se ozvala žákyně Jana s radou, aby to nakreslil opačně, aby trojúhelník rozevíral, a naznačila to rukama. Richard ihned pochopil, smazal svůj chybný postup a zakreslil s pomocí spolužáků na tabuli správné řešení. Žáci tedy spolupracovali v rámci diskuze.



Obrázek 5.2: Obrázek zachycující situaci na tabuli po zakreslení dalšího trojúhelníku (čárkovaného) Richardem mimo předem daný tupoúhlý trojúhelník ABC.

Zopakoval jsem slovně, co Richard provedl: „Takže teď jsme vlastně zvětšili úhel γ na nějaký úhel α, jak je tam napsáno, a přitom jsme zanechali tu stranu c se stejnými rozměry. Necháváme ji stejnou, protože ji chceme vypočítat. Dá se udělat ještě nějaký „tupoúhlejší trojúhelník?““ Tuto otázku žáci pochopili a většina souhlasně přikyvovala, proto jsem se chopil křídy a dokreslil do obrázku ještě jeden trojúhelník s ještě větším tupým úhlem u vrcholu C'', komentuje tento krok (obrázek 5.3). Následně jsem se zeptal, kam toto zmenšování trojúhelníku dospěje. Aktivní žáci správně odpovídali, že do úsečky. Zopakoval jsem tedy proces zmenšování trojúhelníků až do úsečky a dokreslil bod C''' na úsečku AB. Zeptal jsem se dále: „A dokážeme teď vypočítat tu stranu c? Z čeho se vlastně skládá ta strana c?“ Třída diskutovala, většinou ve dvojicích, až se nejistě ozval Richard: „Součet $a+b$.“ Zopakoval jsem jeho myšlenku a k části úsečky AB rozdělené bodem C''' jsem dopsal a, b. „Takže můžeme c vyjádřit jako $a+b$?“ Ihned se ozval Honza: „No, to nemůžeme, ani náhodou, to je blbost.“ Chápal totiž proměnné a, b jako něco neměnného, něco co je pevně dáno. Někteří žáci (včetně Richarda) však chápali a, b jako proměňující se délky stran proměňujících se trojúhelníků. To jsem si bohužel uvědomil až po konci hodiny. Důvody těchto různých interpretací rozebírám v oddíle 5.7.1.



Obrázek 5.3: Obrázek zachycující situaci na tabuli po zakreslení dvou tupoúhlých trojúhelníků (čárkovaných) do předem daného tupoúhlého trojúhelníku ABC.

Na tabuli jsem podle Honzova diktátu zapsal vyjádření c^2 :

$$\text{ús.} \qquad c = a + b$$

$$c^2 = (a+b)^2$$

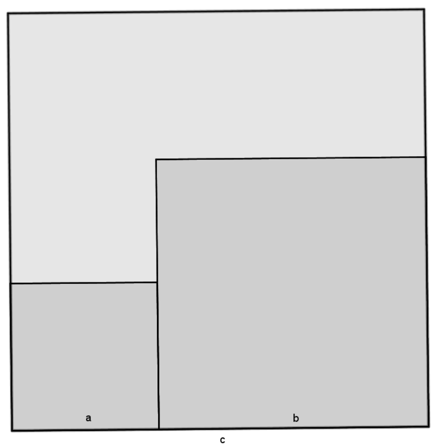
Pro některé žáky bylo složité rozlišit, jestli jsme hovořili o úsečce, nebo o trojúhelníku. Zopakoval jsem opět, že toto platí pro úsečku, ke které jsme se dostali postupným zmenšováním tupoúhlého trojúhelníku. Nad tímto se opět rozproudila diskuze, kterou jsem ukončil rozepsáním dvojčlenu s komentářem, že to platí pro úsečku, čili na tabuli vzniklo

$$c^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Dále jsem pokračoval: „A co je vlastně ta úsečka, co to je za, dejme tomu, trojúhelník v uvozovkách? Jaký má tupý úhel ten trojúhelník? Kam vlastně přešlo to γ?“ Opět se ozval Honza, který řekl, že na 180°, což jsem také zapsal na tabuli. Jelikož se již blížil závěr hodiny, shrnul jsem objevy žáků. Zmínil jsem, že jsme trojúhelník omezili úsečkou z jedné strany a pomocí výpočtů z pracovního listu (obrázek 5.1) ze strany druhé. Ptal jsem se žáků po zapsání těchto nerovnic. Žáci spolupracovali a nadiktovali mi, že

$$a^2 + b^2 < c^2.$$

Ještě jsme potřebovali omezit c^2 shora, což nebylo žákům zcela jasné. Ozval se sice nejistý hlas prozrazující $(a + b)^2$, který však byl překřičen dohady, jestli je to rovno c^2, nebo není. Na tabuli jsem zakreslil obrázek znázorňující geometricky rovnost $c^2 = (a + b)^2$ (obrázek 5.4).



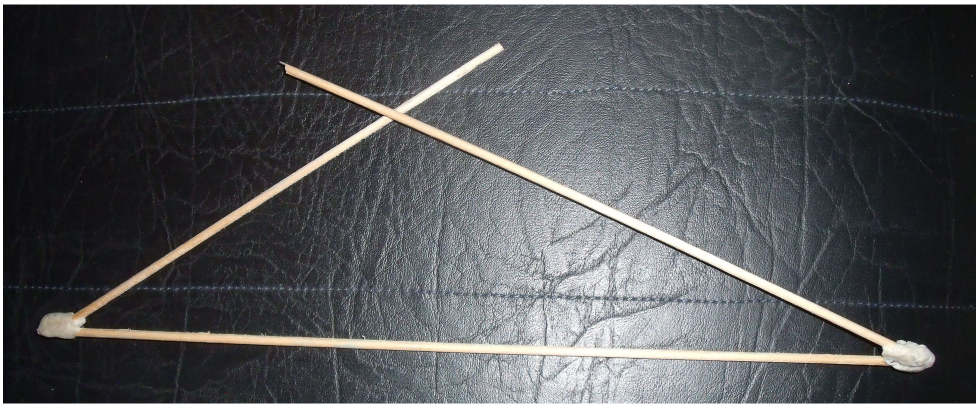
Obrázek 5.4: Obrázek zachycující situaci na tabuli po zakreslení geometrického významu rovnosti $c^2 = (a + b)^2$.

Žáci obrázek představující geometrické znázornění rovnosti znali. Dokončil jsem omezení c^2 sám: „Tady to c^2 pro tu úsečku je $(a + b)^2$. Tak jsme se dostali k té úsečce. Jak jsme se dostali k té úsečce? Ale k té úsečce jsme se dostali z toho trojúhelníku, pro ten trojúhelník tedy bude platit tadleta nerovnost.“ Na tabuli jsem dopsal

$$c^2 < a^2 + b^2 + 2ab.$$

5.5.5 Omezení c^2 v ostroúhlém trojúhelníku

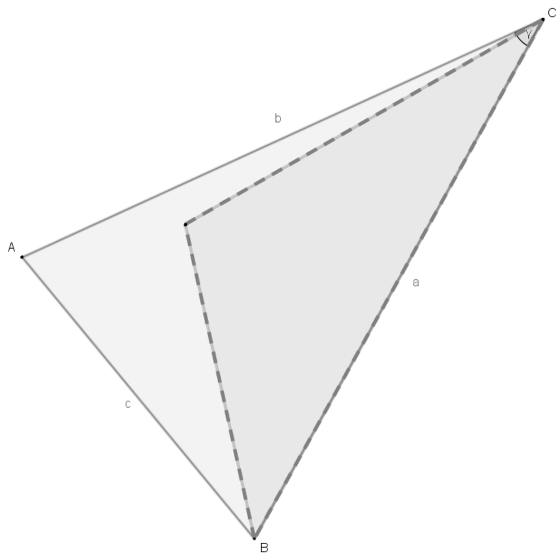
Ve třetí hodině jsem zopakoval náš cíl zobecnění Pythagorovy věty a předvedl jsem žákům pomůcku ze špejlí (obrázek 5.5), která mi pomohla osvětlit problém zvětšování tupého úhlu.



Obrázek 5.5: Fotografie didaktické pomůcky ze špejlí jako názorného předmětu, který reprezentuje proces zvětšování tupého úhlu v tupoúhlých trojúhelnících.

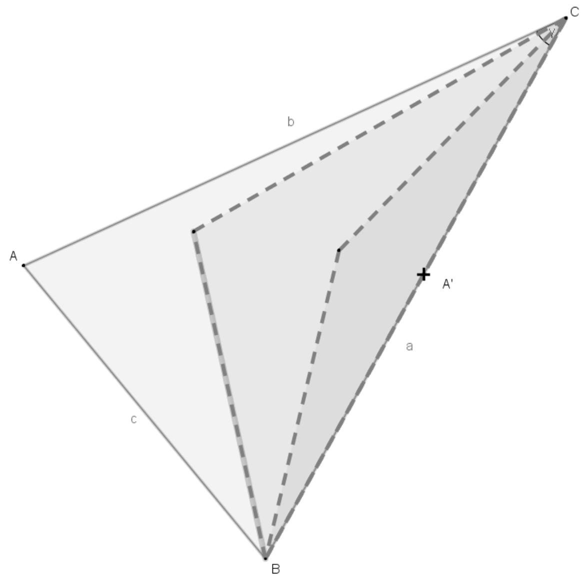
Porovnal jsem pravoúhlý, tupoúhlý trojúhelník a úsečku a pro každý obrazec jsem zapsal, co jsme dosud zjistili. Dále jsem pokračoval podle přípravy, kresle na tabuli ostroúhlý trojúhelník včetně popisu jeho vrcholů a stran. Nadnesl jsem cíl hodiny tím, že jsem žákům sdělil, že budeme měnit ostroúhlý trojúhelník, a připomněl jsem předcházející hodinu, kdy jsme tupoúhlý trojúhelník změnili v úsečku. Opět se přihlásila Irena, kterou neodradil nezdar z minulé hodiny, s tím, že by daný ostroúhlý trojúhelník doplnila na čtverec. Na výzvu, aby šla k tabuli a vysvětlila nám to, však reagovala negativně. Honza se ujistil, co bylo za úkol, a zřejmě pochopil, že se snažíme upravit Pythagorovu větu pro ostroúhlý trojúhelník.

Mezitím si Irena promyslela jiný postup a diktovala mi z lavice: „Tak uděláme výšku a budeme mít dva pravoúhlé trojúhelníky.“ Nechápal jsem přesně: „Tak uděláme výšku. Kde uděláme výšku?“ Irena dodala: „Na stranu a.“ Dokreslil jsem tak do náčrtku výšku na stranu a. Zopakoval jsem, že naším úkolem je zjistit stranu c. Irena reagovala podrážděně, proč zase c, a pochopila tak možná, že její cesta daleko nevede. Myšlenky se však chopil Honza: „Takže z bodu C na stranu c si uděláme výšku.“ Ve třídě se rozproudila diskuze, zareagoval jsem tak, že jsem zopakoval, které strany a úhel známe a kterou stranu ostroúhlého trojúhelníku chceme vypočítat. Irena si spletla těžnici s výškou: „Výška je přece jedna ku dvoum třetinám. Jedna třetina ku dvoum třetinám.“ Ihned se ozval Honza: „Ne, to je nepravidelnej trojúhelník. Irčo, Irčo, to je nepravidelnej trojúhelník.“ Komentoval jsem to slovy, že se nejedná o rovnostranný trojúhelník, tedy že výška není těžnicí. Dále se přihlásila žákyně Lucie, jež hovořila o polovinách některých stran trojúhelníku, čemuž jsem příliš neporozuměl, tak jsem ji požádal, aby svoji myšlenku předvedla třídě u tabule. Vysvětlila nám, jak to myslela, výsledkem tohoto snažení byl kosodélník o stranách b a c. Irena se zeptala, jestli lze odsud tu stranu c vypočítat, známe-li druhou stranu a jeho úhlopříčku.



Obrázek 5.6: Obrázek zachycující situaci na tabuli po zakreslení dalšího trojúhelníku (čárkovaného) do předem daného ostroúhlého trojúhelníku ABC.

Protože jsem viděl, že jsme zabředli do slepé uličky, konstatoval jsem, že náčrtek se ještě zkomplikoval, načež jsem ho smazal se slovy: „Teď vám řeknu, abyste se zaměřili na ten úhel γ a snažili se ho přiblížit k nule, tak aby ta strana c zůstala zachovaná.“ Brzy se ozvala Irena: „Takže budeme přibližovat stranu b v podstatě k straně a. Když budeme přibližovat a a b k sobě, tak nám z toho zase vznikne úsečka.“ Vyvolal jsem ji k tabuli, aby vysvětlila celé třídě svoji myšlenku: „Na základě tohoto postupu, když budeme přibližovat úhel, tak se to zmenší. Takže úhel budeme zmenšovat tak, že pokud bysme přibližovali jednu nebo obě strany k sobě. Zmenšili bysme úhel, jedna podmínka je splněná.“ Honza doplnil: „Jenže musíš zachovat céčko.“ Irena odpověděla: „Zachovat c, samozřejmě. A pokud bysme teda přiblížili tadyty strany...“ Poradil jsem jí: „Tak to tam zakreslete, jak to myslíte, jak je přiblížíte.“ Irena si nevěděla rady, obtáhla stranu c a výšku na tuto stranu. Dokreslil jsem druhý trojúhelník, zachovávaje stranu a, vznikly tak na tabuli dva trojúhelníky (obrázek 5.6).



Obrázek 5.7: Obrázek zachycující situaci na tabuli po zakreslení druhého trojúhelníku (čárkovaného) do předem daného ostroúhlého trojúhelníku ABC.

Ozval se Honza: „Tak nám ale vznikne tupoúhlej trojúhelník, no to ale nechceme.“ Souhlasil jsem, že tupoúhlý trojúhelník vzniknul, ale dodal jsem, že nás zajímal pouze úhel γ. „Minule jsme zvětšovali úhel γ ke $180°$, teďka zmenšujeme úhel γ k nule. To je ten rozdíl. Vzniknou tam tupoúhlé trojúhelníky tak jako tak, to máte pravdu. Takže podobným přechodem, jako to tady bylo minule, dojdeme sem.“ Dokreslil jsem ještě jeden trojúhelník včetně bodu A' na úsečce BC (obrázek 5.7).

Ozval se Honza: „A co teda chceme, co teda, jaký vzdálenosti teda chceme nebo jaký strany chceme zachovat?“ Ujistil jsem jej, že chceme zachovat stranu c. Dohodli jsme se nakonec, že jsme zkracovali pouze stranu b a zmenšovali úhel γ. Honza dodal: „A jsme zase tam, kde jsme byli předtím, zase to c^2.“

Jelikož se hodina nikam neposouvala, musel jsem část dodělat sám: „A dojde to vlastně do tohoto stavu, že tady tu stranu BC, to je strana a, a tady se objevil ten nový bod, dejme tomu, A'. Jaká vzdálenost bude AB?“ Ozvala se Irena: „No bude to zase menší než c.“ Ještě jsem se chtěl ujistit: „To AB, to bude c, nebo to bude menší?“ Irena odpověděla: „Menší než jakákoliv z těch dvou stran.“ Myslela zřejmě strany b a c. Irenu jsem za její myšlenky pochválil a shrnul jsem to následovně: „Opět pro tu úsečku bude platit, že $a = b + c$. Teď už jsme se dostali k té úsečce, už nejsme u toho ostroúhlého trojúhelníku. Tak, z toho vyjádřím c. Tak, $c = a - b$. Abych dostal c^2, tak to umocním.“ Žáci mi nadiktovali umocněný dvojčlen, takže na tabuli bylo napsáno:

$$a = b + c$$

$$c = a - b$$

$$c^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Dále jsem to komentoval slovy: „Tak to jsme řešili tu úsečku zatím. No, a stejně tak, jako je vlastně ten postup u toho tupoúhlého trojúhelníku, tak je postup u toho ostroúhlého. To znamená, opět omezím to c^2, teď už si to c^2 vyjádříme, jak vlastně bude, jak bude to c^2 teďka vypadat.“ Přeskočil jsem omezení c^2 v ostroúhlém trojúhelníku a shrnul jsem raději na tabuli předpisy pro c^2 pro limitní velikosti úhlu γ. Tázal jsem se žáků na podobu c^2 pro $\gamma = 90°$ a ti správně odpověděli, že se jedná o pravoúhlý trojúhelník, tedy o Pythagorovu větu. Tu jsem zapsal jako první, analogicky jsme si ujasnili a zapsali dva krajní případy c^2 pro $\gamma = 0°$ a pro $\gamma = 180°$.

5.5.6 Zobecnění vztahu

Postupoval jsem podle přípravy a ptal se žáků na zobecnění těchto třech krajních případů. „Dokázali byste to nějak zobecnit? Támhleto, co máme, to $a^2 + b^2$ a tak dále?“ Někteří žáci vykřikovali $a^2 + b^2 + ...$ a tak jsem zeptal: „Na čem to bude záviset?“ Ozval se Honza: „Jestli to bude mezi nulou, nula stupněmi a devadesáti a devadesáti a stoosmdesáti.“ Chtěl jsem, aby myšlenka zazněla jasněji, takže jsem ještě dodal: „Takže to bude záviset na tom...“ Honza mě nenechal domluvit: „Na tom úhlu γ.“ Shrnul jsem tedy zásadní myšlenku: „Na tom úhlu γ. Souhlasíte s tím všichni?“ Tato idea tedy zazněla ve třídě několikrát.

Začal jsem psát zobecněné vyjádření pro c^2 a (nejen) Honza mi poradil, že tam vždy bude $a^2 + b^2$, tak jsem to zapsal. Dále jsem zvolil znaménko minus a ptal se, co bude dál. Jeden ze žáků tvrdil, že to bude $-\gamma$, což jsem mu vyvrátil poukázáním na případ pro $\gamma = 90°$. Honza navrhoval dopsat $-2ab$ nebo $-(-2ab)$. Zapsal jsem tedy jen $-2ab$. Upozornil jsem však, že se stále jedná jen o limitní případy. Po chvíli diskuze jsem řekl:

„Ještě tam bude něco neznámého, co to vlastně bude převádět.“ Honza se blýsknul: „x tam může být.“ Pokračoval jsem: „Nějaká x, ano nějaká x neznámá. Já tam napíšu krát x. Když říkáte x, tak tam napíšu x.“ Honza dodal: „A to bude velikost toho stupně?“ Je vidět, že Honza často tipoval, aniž by si své kroky dopředu promyslel, nicméně ukázal se jako tahoun třídy. S poukázáním na případ pro $\gamma = 90°$ jsem tento návrh zavrhnul. „Co to bude to x? Nějaká neznámá x nám tam začala figurovat.“ Po chvilce se ozvala další žákyně, která se domnívala, že se jedná o velikost úhlu. Nechal jsem žáky hlasovat, jestli se za neznámou skrývá úhel γ, a někteří zvedli ruku na souhlas. Honza však oponoval, že jsme to před chvílí zavrhli. Ukazuje to jak na nepozornost některých žáků, tak zejména na nepromýšlení odpovědí. Žáci často tipovali, byť si byli vědomi závislosti hledaného výrazu na velikosti úhlu. Prvoplánová řešení, která hádali, byla podporována obvyklým pojmenováním neznámé x, které však vůbec nepodporuje myšlenku hledání funkční závislosti, jež se zpravidla značí $f(x)$.

5.5.7 Izolované modely

Nasměroval jsem žáky na jejich pracovní listy (obrázek 5.1), upozornil je, že písmena a, b, a c už měli všechna zjištěna a navedl je na postup, kterak by ze vztahu

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abx \tag{5.1}$$

zjistili neznámou x. Aniž bych neznámou z rovnice vyjadřoval, rozdělil jsem třídu na dvě poloviny, přičemž obě měly za úkol vypočítat neznámou pro tři trojúhelníky z pracovního listu. Komentář k faktu, že někteří žáci ani po dlouhé době a po několikátém vysvětlení nevěděli, co měli dělat, je popsán v oddíle 5.7.1. Když se někteří žáci chýlili ke konci svých výpočtů, předkreslil jsem na tabuli tabulku pro šest trojúhelníků s políčky pro hodnoty x a γ. Zdůraznil jsem opět, že neznámá x závisí na úhlu γ. Už v průběhu tohoto počítání zaznívala ve třídě slova sinus a kosinus, kterým jsem zatím nevěnoval přílišnou pozornost. Když jsme vyplnili polovinu tabulky, zazvonilo.

Na čtvrté hodině jsem zopakoval, kam jsme došli v předchozích hodinách. Vztah 5.1 jsem přepsal do vztahu

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abf(\gamma), \tag{5.2}$$

což jsem zdůvodnil tím, že neznámá x závisí na úhlu γ. Zopakoval jsem proto krajní

Tabulka 5.1: Tato tabulka zachycuje tabulku hodnot, kterou jsem rozdal žákům.

	a	b	c	c^2	a^2+b^2	α	β	γ
I.	5	4	7,4	54,8	41	39°	30°	111°
II.	3,6	3	4	16	22	60°	45°	75°
III.	6	6	8,5	72,2	72	45°	45°	90°
IV.	2,9	8	9,8	96	72,4	15°	45°	120°
V.	3,7	7	10	100	62,7	15°	30°	135°
VI.	4,7	4,7	9	81	44,2	15°	15°	150°

případy vyjádření c^2, a osvětlil jsem tak znovu onu závislost. Domníval jsem se, že přeznačení by v žácích více evokovalo hledání funkce. Požádal jsem žáky o vyjádření neznámé $f(\gamma)$ a nabídl se Honza, který ji vyjádřil správně. Zadal jsem žákům úkol pozměnit předchozí vztah tak, aby obsahoval místo neznámé $f(\gamma)$ neznámou $f(\alpha)$, respektive neznámou $f(\beta)$. Načrtnul jsem proto trojúhelník, v němž jsem popsal vrcholy, strany a úhel γ. Žáci sami objevili, že na levé straně vztahu 5.2 se vždy nachází protilehlá strana úhlu, jejž vztah obsahuje. Žáci následně vcelku zdárně vyjádřili $f(\alpha)$ a $f(\beta)$.

Z časových důvodů jsem rozdal žákům vyplněnou tabulku parametrů trojúhelníků z pracovního listu (tabulka 5.1). Kladl jsem důraz na to, aby všichni pochopili zadání tohoto úkolu, protože velmi záviselo na přesnosti výsledků, které obdrželi. Jejich úkolem bylo vypočítat hodnoty $f(\alpha)$, $f(\beta)$ a $f(\gamma)$ pro zvolený trojúhelník. Všechny údaje nalezli v tabulce. Rozhodl jsem se pro tuto variantu, přestože některé hodnoty žáci počítali znovu. Domníval jsem se, že dohledávání výsledků z konce předešlé hodiny by bylo příliš zdlouhavé, a těm, kteří minule chyběli, by tyto výpočty chyběly. Z časových důvodů jsem žáky rozdělil do skupin, v níž každý žák počítal zmíněné hodnoty pro stejný trojúhelník, tudíž každý počítal pouze třikrát. Vybral jsem k tomu trojúhelníky II, IV a V (obrázek 5.1), a to proto, že velikosti vnitřních úhlů těchto trojúhelníků se až na dva případy lišily, většina hodnot kosinů těchto úhlů je význačnými hodnotami (někteří žáci je znali) a úhly pokrývaly víceméně celý interval od 0° do 180°.

Jakmile měla většina žáků vypočítáno, vyvolal jsem některé k tabuli, aby do předepsané tabulky zapsali výsledky spolu s odpovídajícími úhly. Tabulka 5.2 měla řádek $f(y)$, tedy hodnoty, které žáci vypočítali – tj. $f(\alpha)$, $f(\beta)$ a $f(\gamma)$, a řádek y, čili velikosti příslušných úhlů α, β a γ, které opsali z původní tabulky parametrů trojúhelníků.

Tabulka 5.2: Tato tabulka zachycuje tabulku hodnot hledané funkce, jak ji vyplnili žáci.

y	60°	45°	75°	120°	45°	15°	15°	30°	135°
$f(y)$	0,502	0,691	0,27	−0,37	0,69	0,96	0,96	0,87	−0,72

Vysvětlil jsem jim smysl proměnné y, s čímž žáci neměli problém. Neočekával jsem nutnost zavedení proměnné y, stejně jako jsem neočekával časovou a organizační náročnost, když měli žáci vypočítat jedenáct hodnot pro jedenáct různých úhlů. Počítání včetně zápisu do tabulky zabralo okolo patnácti minut.

5.5.8 Objev funkce kosinus

Jakmile byla tabulka vyplněná, oznámil jsem žákům, že dalším krokem bude vynášení hodnot do grafu. Načrtnul jsem osy y a $f(y)$ a vyvolal jsem žákyni k vynesení hodnot do grafu. Vysvětlil jsem jí, jakým způsobem graf vytvořit. Z důvodu přehlednosti grafu jsem musel zmínit, že hodnoty funkce jsou menší než jedna, což mohla být částečná nápověda pro pojmenování funkce. V průběhu tvorby grafu jsem zdůrazňoval jeho nepřesnost z důvodů zaokrouhlení a vynášení hodnot do grafu „od oka“. Závěr hodiny se blížil, proto jsem graf dokončil samostatně, což odůvodňuji v oddíle 5.7.1. Žákyně zakreslila pouze šest bodů, sedmý (pro úhel 60°) jsem dodělal.

Následně jsem se zeptal žáků: „Můžeme ty diskrétní body propojit čarou? Lze vlastně teďka z toho udělat nějakou funkci? Spojit to?“ Žáci příliš nereagovali, většinou se zabývali svými grafy v sešitech a nedávali pozor. Obešel jsem proto některé žáky a viděl, že někteří již body spojili. Jeden z nich je propojil přibližně jako graf nepřímé úměrnosti, jiný odhadoval graf na „hyperbolu nebo parabolu – něco takového, v těch se nevyznám.“ Našli se však i tací, kteří tipovali vcelku přesně – sinusoida nebo kosinusoida. Další odhadovali kosinus podle známé hodnoty 0,5 pro úhel 60°. Spolužák, který tuto hypotézu slyšel, však oponoval, že: „To nemůže být kosinus, vždyť to vypadá úplně jinak.“ Úvahy o těchto nejistotách jsem rozepsal v oddíle 5.7.1.

Potřeboval jsem graf dokončit, proto jsem dále opakoval svoji otázku, jestli lze diskrétní body propojit ve spojitý graf. Žáci neodpovídali, proto jsem se zeptal, co představují úhly na vodorovné ose. Žáci odvětili, že se jedná o vnitřní úhly trojúhelníku, čímž jsme společně objasnili, že lze body propojit spojitou čarou. Jelikož v grafu chyběla hodnota hledané funkce pro úhel 90°, doptal jsem se po hodnotě žáků. Odhadovali nulu, proto jsem poukázal na vztah 5.2, na kterém jsem okomentoval, že po dosazení $f(\gamma) = 0$ zbyde pouze $c^2 = a^2 + b^2$, a Honza se ihned ozval, že je to Pythagorova věta. Mohl jsem tedy přikreslit do grafu osmý bod a už mi nic nebránilo zakreslit část grafu kosinu, přibližně od 0° do 45°. Komentoval jsem to slovy: „Ta čára bude začínat tady někde nahoře a bude pokračovat takhle dál. Co si myslíte, jaká je to závislost? Co to je za funkci, která nám to bude spojovat?“ Ozvalo se několik hlasů, prozrazujíc funkci kosinus. Současně zvonilo, ale žákům to nikterak nevadilo. Ozval se Honza, který očividně nesouhlasil: „No to právě nebude, protože to je úplná blbost.“ Něco nesrozumitelného si ještě řekl se spolužákem: „Sinus, nebo kosinus, to je právě rozdíl.“ Tento rozhovor komentuji v oddíle 5.7.1. Na tabuli jsem dokreslil funkci do argumentu 180° a komentoval nepřesnost nákresu. Potvrdil jsem, že se jedná o kosinus, a dopsal jsem na tabuli závěrečný vztah kosinové věty

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{5.3}$$

5.5.9 Diagnostika porozumění kosinové větě

Na začátku další hodiny jsem zopakoval, že námi hledaná funkce je $\cos\gamma$, zapsal jsem kosinovou větu ve tvaru 5.3 a prozradil jsem žákům, že se jmenuje kosinová věta. Po konzultaci s Mgr. Černou jsem se oproti plánu rozhodl nezařadit důkaz. Paní učitelka argumentovala tím, že moje aktivita by výrazně převyšovala aktivitu žáků, protože důkaz je relativně náročný. Zeptal jsem se raději žáků na podobu kosinové věty, pokud bych místo úhlu γ znal úhel β. Irena mi správné znění nadiktovala, tudíž jsem pod vztah 5.3 napsal

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta. \tag{5.4}$$

Doplnil jsem, že se jedná jen o jiné vyjádření téhož. Analogicky proběhlo i třetí vyjádření kosinové věty. Dále jsem se zeptal, o který úhel se v kosinové větě jedná vzhledem k neznámé na levé straně vzorce. Žáci správně odpověděli, že je to vždy protilehlý úhel, aniž bych stačil dokreslit trojúhelník.

Další diagnostická otázka směřovala po platnosti kosinové věty, tedy pro jaké trojúhelníky kosinová věta platí. Zazněly odpovědi pro všechny, pro obecné. Chtěl jsem se ujistit, že žáci pouze netipovali: „Není tam žádná výjimka?“ Irena se ozvala: „Pro všechny platit nemůže, protože pak by neplatila pro pravoúhlý trojúhelník.“ Měla zřejmě na mysli souvislost mezi Pythagorovou větou, o níž byla přesvědčená, že v pravoúhlém trojúhelníku platí, a kosinovou větou, která obsahuje na rozdíl od Pythagorovy něco navíc, proto pro pravoúhlý trojúhelník platit nemůže. Nicméně zareagoval Honza: „Ne, pro všechny trojúhelníky. Pro všechny.“ Spor jsem nerozhodl hned, spíše jsem žáky nabádal: „Zkuste si to promyslet, jo? Pravoúhlej trojúhelník, mám tam jeden ten úhel, znám, že jo, to je 90°, tak co se stane s tím členem, tady?“ Ukázal jsem na člen $-2bc\cos\alpha$ a vše bylo jasné. Ujistil jsem se, že žáci chápou vztah mezi Pythagorovou a kosinovou větou.

Přeskočil jsem aplikační úlohu kosinové věty a historickou motivaci tématu trigonometrie. Pořadí dalších dvou bodů přípravy popsané v oddíle 5.2 jsem prohodil a zeptal jsem se žáků, jestli by platila upravená kosinová věta do vztahu

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sin\gamma. \tag{5.5}$$

Žáci se shodli, že takto to upravit nelze. Zeptal jsem se jich, jak by ověřili, že tento vztah neplatí. Po chvilce, kdy si nevěděli rady, jsem jim poradil, že by stačilo, kdyby nalezli alespoň jeden trojúhelník, pro nějž to neplatí. Někteří žáci navrhovali vyzkoušet pravoúhlý trojúhelník. Tak jsem se jich zeptal, jakou podobu by měl vztah pro pravoúhlý trojúhelník po dosazení velikosti známého úhlu. Jeden žák tvrdil, že $\sin 90° = 0$, ale na tento výrok reagovalo několik jeho spolužáků a opravili jej. Zdůvodnil jsem potom, že vztah nemůže platit, protože po dosazení by byl odlišný od Pythagorovy věty.

Zadal jsem poté úlohu vyjádřit kosinovou větu v trojúhelníku KLM, známe-li úhel ω u vrcholu M. Zkoumal jsem, zda jsou žáci schopni oprostit se od tradičních písmen. Přihlásila se Irena, která po chvilce přemýšlení napsala na tabuli vztah

$$m^2 = k^2 + l^2 - 2kl\cos\gamma.$$

Spolužáci na její drobnou chybu okamžitě reagovali a Irena ji opravila podle jejich správného návrhu.

5.5.10 Motivace pro objevování další trigonometrické věty

Zeptal jsem se, jak bychom spočítali velikost úhlu ϕ u vrcholu L. Zadal jsem číselné hodnoty pro trojúhelník KLM podle úlohy z učebnice ([Odvárko 2007], s. 109, úloha 4.1c)).

Jedná se o trojúhelník zadaný pomocí věty Ssu. V prvním způsobu výpočtu, pomocí kosinové věty, je zapotřebí najít řešení dvou kvadratických rovnic, protože nejprve hledáme velikost strany, k níž není zadaný úhel protilehlý, až poté velikost daného úhlu. Druhý způsob výpočtu používá sinovou větu. Na rozdíl od přípravy jsem tedy zvolil úlohu, kterou lze vyřešit pomocí sinové i kosinové věty. Chtěl jsem totiž žáky motivovat názornou obtížností řešení úlohy pomocí kosinové věty pro objevování další trigonometrické věty.

Úloha 5.5.1 (číselné hodnoty podle učebnice) *Určete velikost vnitřního úhlu ϕ u vrcholu L trojúhelníku KLM, je-li dáno $l = 25$ cm, $m = \sqrt{2} \cdot 25$ cm, $\omega = 45°$ (u vrcholu M.)*

Pro přehlednost uvádím i řešení úlohy, i když žákům jsem ho pochopitelně neukazoval.

Řešení pomocí kosinové věty: Kosinová věta má v tomto trojúhelníku znění $m^2 = k^2 + l^2 - 2kl \cos \omega$, po dosazení hodnot dostaneme rovnici $1\,250 = k^2 + 625 - 25\sqrt{2}k$, kterou přepíšeme do tvaru $k^2 - 25\sqrt{2}k - 625 = 0$, což je kvadratická rovnice, jejíž řešení je $k_{1,2} = \frac{25}{2}(\sqrt{2} \pm \sqrt{6})$, z čehož má smysl pouze kladný kořen $k = \frac{25}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \doteq 48{,}3$ cm. Velikost úhlu ϕ vypočítáme pomocí kosinové věty $l^2 = k^2 + m^2 - 2km \cos \phi$, po dosazení přibližných hodnot dostaneme rovnici $625 = 2\,332{,}89 + 1\,250 - 2\,415\sqrt{2} \cos \phi$, kterou upravíme do přibližného tvaru $\cos \phi = 0{,}86$, z čehož dostáváme $\phi = 30°$.

Řešení pomocí sinové věty: Sinová věta má v tomto trojúhelníku znění $\frac{m}{\sin \omega} = \frac{l}{\sin \phi}$, po vyjádření neznámé a dosazení hodnot obdržíme $\sin \phi = \frac{25}{\sqrt{2}\,25} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, po úpravě $\sin \phi = \frac{1}{2}$, a tedy $\phi = 30°$.

Zeptal jsem se žáků, jestli lze použít kosinovou větu, popřípadě jak, a jestli nelze, tak proč. Žáci chvíli přemýšleli a diskutovali. Nahlédli, že jedním použitím kosinové věty jsme schopni vypočítat pouze velikost strany k, nikoli však velikost požadovaného úhlu ϕ. Irena mi cosi vysvětlovala ohledně věty sus. Příliš jsem tomu nerozuměl, proto jsem její podnět odmítl s tím, že pomocí této věty to vypočítat nelze. Až po hodině mi došlo, že Irena měla na mysli, že pokud je trojúhelník zadán pomocí věty sus, tedy známe-li velikosti dvou stran trojúhelníku a velikost jimi sevřeného úhlu, tak je možné dopočítat velikost třetí strany. Měla sice na mysli jinou větu o shodnosti trojúhelníků, ale v principu bylo důležité, že zde zmínila tuto souvislost, o níž píšu více v oddíle 5.7.1.

K nelibosti žáků jsem ponechal úlohu otevřenou s tím, že se k ní na konci hodiny vrátíme. Zdůvodnil jsem to složitostí výpočtů, které by žáci museli provést. Motivoval jsem žáky k další práci poznámkou o mnohem jednodušším způsobu výpočtu než pomocí kosinové věty.

5.5.11 Hledání největšího z poměrů

Rozdělil jsem třídu do šesti skupin. Každá skupina měla v daném trojúhelníku za úkol vypočítat poměry $a : \sin\alpha$, $b : \sin\beta$, $c : \sin\gamma$ a zjistit, který z nich je největší. Jejich úkol jsem jim vysvětlil a při obcházení třídy jsem skupinám radil, co bylo zapotřebí. Žáci se mě například dotazovali, proč jsme nedořešili rozpracovanou úlohu, která byla na tabuli.

Žáci nebyli příliš schopni pracovat ve skupinách. Možné důvody tohoto problému rozebírám v oddíle 5.7.1. Stejně tak se níže snažím zjistit, proč zaznělo od žáků mnohokrát znění vztahu 5.3. Slyšel jsem: „$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$." Také jsem zaslechl, že nelze použít vzoreček, protože obsahuje kosinus. Nebo také: „Abych to mohla dát do toho vzorečku, tak potřebuju kosinus."

Postupem času však téměř všichni pochopili, co je smyslem této práce, a počítali. Dvě skupiny vypočítaly pouze siny daných úhlů, další skupina vypočítala správně hodnoty dvou trojúhelníků, jiná skupina byla velmi pomalá a při ukončení skupinové práce teprve začínala. Objevily se tedy obrovské rozdíly. Skupinovou práci jsem po určité době ukončil. Vyvolal jsem skupinu, která byla výrazně lepší než ostatní, protože vypočítala poměry u dvou trojúhelníků. Helena a Karolína z této skupiny napsaly na tabuli výsledky svých výpočtů. Vzhledem k nepřesnostem v mém rýsování trojúhelníků na pracovním listu (obrázek 5.1), k nepřesnostem v žákovských měřeních úseček a úhlů či v zaokrouhlováních při výpočtech se výsledky poměrů lišily v řádech desetin. Obě žákyně shodně zakroužkovaly největší z poměrů. Komentoval jsem to následovně: „Vyšly celkem podobná čísla. Zeptám se ostatních, našel někdo výrazně větší nějaký ten poměr, nebo vám taky vycházely podobná čísla?" Většina třídy souhlasila s tím, že vycházela velmi podobná čísla.

Přerušil jsem opět skupinovou práci a zeptal jsem se: „Co si myslíte, že jde říct o těch poměrech?" Honza odpověděl: „Jsou podobné." Dále jsem pokračoval: „No je to zvláštní, že vám pořád vychází něco stejného, nebo podobného. Dokázal by to někdo slovně popsat? Co pro ty poměry platí?" Žáci se nikterak neprojevovali, tak jsem pokračoval: „V ideálním případě, samozřejmě, jo? Co si myslíte, co ty poměry, když budu dobře měřit, dobře počítat? Tak jaké budou ty poměry navzájem k sobě?“ Z lavic jsem se dočkal odpovědí, že budou stejné nebo podobné. Dále jsem se ptal: „Stejné, podobné? Některý větší, menší?“ Nechal jsem tedy třídu hlasovat o tom, kdo se domnívá, že jsou poměry stejné. Nikdo se nepřihlásil, většina třídy tvrdila, že jsou podobné.

Potřeboval jsem hodinu posunout dál, tak jsem řekl: „Takže je tady, je tady takovej otazník, jestli budou stejné, nebo podobné. Takže to bude záviset na těch číslech a tak podobně.“ Po chvilce, kdy bylo jasné, že ze žáků nic kloudného nedostanu, jsem dodal: „Takže je tady takový otazník, jestli platí, když napíšu tohle, tak jestli to platí.“ Napsal jsem

$$? \qquad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{5.6}$$

Ozvala se žákyně, že prý to platí přibližně. Dodělal jsem tedy nad rovnítka tečky znázorňující přibližnou rovnost, což jsem okomentoval. Do toho se ozval Honza: „Ne, určitě to platí, platí!“

5.5.12 Důkaz sinové věty

Nevšímal jsem si jeho ojedinělého názoru a zeptal jsem se, jak bychom zjistili, jestli tento vztah opravdu platí. Irena řekla, že bychom mohli dosadit. Tuto reakci rozvádím v oddíle 5.7.1. Hrál jsem se žáky tuto hru a nechal jsem je dosadit čísla do vztahu 5.6 za účelem jejího „dokázání“.

Záhy vstoupil do diskuze další žák s názorem, že poměry budou vždy podobné. Načež jsem se tázal, jestli lze toto tvrzení vyjádřit matematicky. Kvůli těmto nejasnostem jsem upřednostnil důkaz sinové věty před diagnostikou jejího porozumění. Nakreslil jsem na tabuli ostroúhlý trojúhelník a pustil jsem se do důkazu. Honza mě však nenechal dále mluvit a pronesl vcelku zajímavou úvahu: „Ne, ale tak vždycky, když se nám prostě zvětší, nebo zmenší ta strana, tak stejně tak se zvětší, nebo zmenší ten úhel...“ Reagoval jsem: „A ten sinus toho úhlu?“ Honza odvětil: „Ten se zároveň zmenší s tím úhlem.“ Zopakoval jsem tedy: „Když budu zmenšovat úhel, tak se zmenší i jeho sinus, samozřejmě.“

Přešel jsem jeho poznámku, dokreslil jsem do trojúhelníku výšku na stranu c a popsal jsem jej. Honza se mě zeptal, jaký smysl tam má ta výška. Odpověděl jsem mu: „Ta výška, ta tam je schválně. Ta tam je schválně, abych tady obdržel pravoúhlý trojúhelník. Tak, když se kouknu na ten pravoúhlý trojúhelník, co můžu použít v pravoúhlém trojúhelníku?“ Jako první zazněla Pythagorova věta, což rozepisuji v oddíle 5.7.1. Jako další zazněla věta sss.

Až na výzvu, že jsem měl na mysli funkce, jsem zaslechl kosinus, respektive goniometrii. Zadal jsem tedy žákům úkol vyjádřit výšku na stranu c s patou P pomocí nějaké goniometrické funkce, známe-li strany a, b a úhly α, β. Většině žáků jsem při obcházení znovu vysvětloval, co jsem po nich žádal. Po chvíli se přihlásil Honza se správným řešením $|CP| = a \sin \beta$. Zopakoval jsem třídě, co Honza objevil. Chtěl jsem se ještě ujistit, proto jsem hrál „hloupého“ a tvrdil jsem, že to nebylo správně. Brzy mě však Honza přesvědčil, že měl pravdu. Ptal jsem se ještě po druhém vyjádření téže výšky, pokud bych použil druhý pravoúhlý trojúhelník. Ihned zaznělo $b \sin \alpha$. Na tabuli bylo pod sebou napsáno:

$$|CP| = a \sin \beta$$

$$|CP| = b \sin \alpha$$

Důkaz jsem dokončil sám porovnáním obou rovností a postupnými úpravami jsem dospěl k výrazu

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Dokončil jsem důkaz komentářem, že kdybychom pojmenovali trojúhelník jinak, zjistili bychom, že totéž platí i pro stranu c a úhel γ. Smazal jsem tedy otazník před vztahem 5.6. Ozvala se Helena: „Ale když to vyšlo jinak, tak to znamená pouze jako odchylky v měření, nebo?“ Ujistil jsem ji, že měla pravdu, nepřesnosti vznikly rýsováním, měřením a zaokrouhlováním. „Ale mělo by to vyjít?“ Opět jsem ujišťoval: „Mělo by to vyjít, obecně to platí, tady jsme si to teď dokázali jednoduše, jo?“ Helena nadšeně souhlasila. Tento úkaz komentuji v oddíle 5.7.1.

5.5.13 Dořešení úlohy

Vztah jsem nazval sinovou větou a vyzval jsem žáky k dořešení úlohy z úvodu hodiny. Zbytek hodiny jsem obcházel žáky. Na společné dokončení úlohy již nedošlo.

Během obcházení jsem si všiml několika žákovských problémů. Žáci kupříkladu chtěli použít sinovou větu, správně ji přepsali pro odlišně značený trojúhelník, ale z výrazu $\frac{m}{\sin \omega} = \frac{l}{\sin \phi}$ měli problém vyjádřit a následně vypočítat $\sin \phi$. Stalo se například, že žáci vypočítali $\frac{m}{\sin\omega} = 50$ a dál si s úpravami rovnice nevěděli rady. Jiní žáci neuměli z výrazu $\sin\phi$, který číselně vypočítali, dopočítat ϕ, zejména pokud se nejednalo o význačnou hodnotu.

Málokteří žáci úlohu dořešili. Helena s Karolínou však byly mezi nimi. Dostaly se k řešení $\phi = 30°$, načež jsem se zeptal, jestli je to jediná možnost. Po chvíli jsem za žákyněmi přišel, napsaly mezitím ještě $-30°$ s poznámkou, že to není trojúhelník. Neschopnost řešit goniometrické rovnice byla častým nedostatkem žáků.

Následující hodinu jsem vyvolal Jaroslava, aby úlohu vyřešil na tabuli. Objevilo se u něj více nedostatků, od neschopnosti označit správně trojúhelník, přes nevědomost, jak se zkráceně píše kosinus, až po neporozumění tomu, co mu spolužáci napovídali. Závažnější nedostatky však vidím v tom, že žák neviděl rozdíl mezi kosinovou a sinovou větou. Jaroslav si nepamatoval jejich znění. Když jsem mu radil, aby si vzpomněl na včerejší objevování ohledně poměrů, na nic si nevzpomněl. Souviselo to také s jeho včerejší nepozorností a nekázní. Nakonec větu ve spolupráci s ostatními napsal správně.

Vyvolal jsem raději spolužáka Romana. Zatímco počítal, obešel jsem třídu, vida, že většina si počítala sama a někteří již byli hotovi. Byly mezi nimi i Karolína s Helenou, které jsem znovu nabádal ke kontrole, jestli je řešení $\phi = 30°$ jediné. Roman s pomocí spolužačky opravil chybné Jaroslavovo dosazení do sinové věty, s úpravou rovnice jsem mu pomohl. Nebyl schopen vyjádřit $\sin\phi$ ze sinové věty. Pak se zastavil u problému, jak vyřešit rovnici $\sin\phi = 0{,}5$. Poradil jsem třídě, jak používat kalkulačky, a zopakoval jsem s nimi, jak vyřešit tuto goniometrickou rovnici přes graf funkce sinus. Roman zapsal řešení ve tvaru $\sin\phi = 0{,}5 = 30°$.

Vyvolal jsem k tabuli Helenu a znovu jsem podotknul, že $\phi = 30°$ není jediné řešení. Sama měla již v sešitě graf funkce $f(x) = \sin x$, ovšem chyběla jí konstantní funkce $g(x) = 0{,}5$, takže asi proto měla jen řešení $\phi = 30°$. Vzápětí odhalila v grafu druhé řešení rovnice, $\phi = 150°$, a poté celé třídě vysvětlila, proč to nemůže být řešením celé úlohy.

5.5.14 Diagnostika porozumění sinové větě

Jakmile jsme úlohu dořešili, zeptal jsem se, jestli by platila sinová věta i v pravoúhlém trojúhelníku. Ze třídy se ozvalo, že už jsem se jich ptal. Předešlý dotaz po platnosti kosinové věty v pravoúhlém trojúhelníku splynul žákům s tímto dotazem. Irena tvrdila, že kosinová věta v pravoúhlém trojúhelníku neplatí. Zareagoval jsem: „To si můžeme ověřit, že jo, jestli platí.“ Najednou Irena obrátila, a tak jsem se jí zeptal, jestli by věděla, proč platí. „Protože tam by za to $\cos 90°$ je nula, takže by to vypadlo,“ řekla.

Vrátil jsem se k sinové větě: „Jaký úhel znám vždycky v pravoúhlém trojúhelníku?“ Irena: „Ten 90°.“ Napsal jsem na tabuli sinovou větu a nechal jsem žáky zvolit označení pravého úhlu. Zvolili úhel γ a dosadili jsme do sinové věty. Na tabuli bylo napsáno

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = c.$$

Podotkl jsem: „To znamená, ptám se, jestli v pravoúhlém trojúhelníku platí toto.“ Nakreslil jsem k tomu pravoúhlý trojúhelník včetně popisu a zeptal jsem se, lze-li vyjádřit c jako $\frac{a}{\sin\alpha}$. Žáci příliš nespolupracovali, proto jsem se ptal dál: „Co je vlastně $\sin\alpha$ v pravoúhlém trojúhelníku?“ Žáci mi poradili, že sinus je protilehlá odvěsna ku přeponě a zbytek odůvodnění jsem dodělal sám.

Dále jsem se žáků ptal po vhodnosti používání sinové a kosinové věty. Nakreslil jsem trojúhelník a vyznačil známou stranu a dva úhly k ní přilehlé. První tip byla kosinová věta, který žáci zdůvodňovali tím, že do sinové věty vždy potřebuji znát stranu a protilehlý úhel. Rozřešení přinesla Irena, která ozřejmila souvislost s větami o shodnosti: „A může se z tohohle vůbec udělat sinová věta? Jo, půjde to, *sus* a *usu* jde řešit pomocí sinu a *sss* pomocí kosinu, ne?“ Chtěl jsem, aby porozuměli všichni: „Co tím myslíte, *sss*? Jak to vypočítat?“ Irena odpověděla: „Strana, strana, strana. Když budu mít strany, tak použiju kosinus, a když budu mít strana, úhel, strana, nebo úhel, strana, úhel, tak použiju sinus.“ Chybu ohledně věty *sus* jsem nekomentoval.

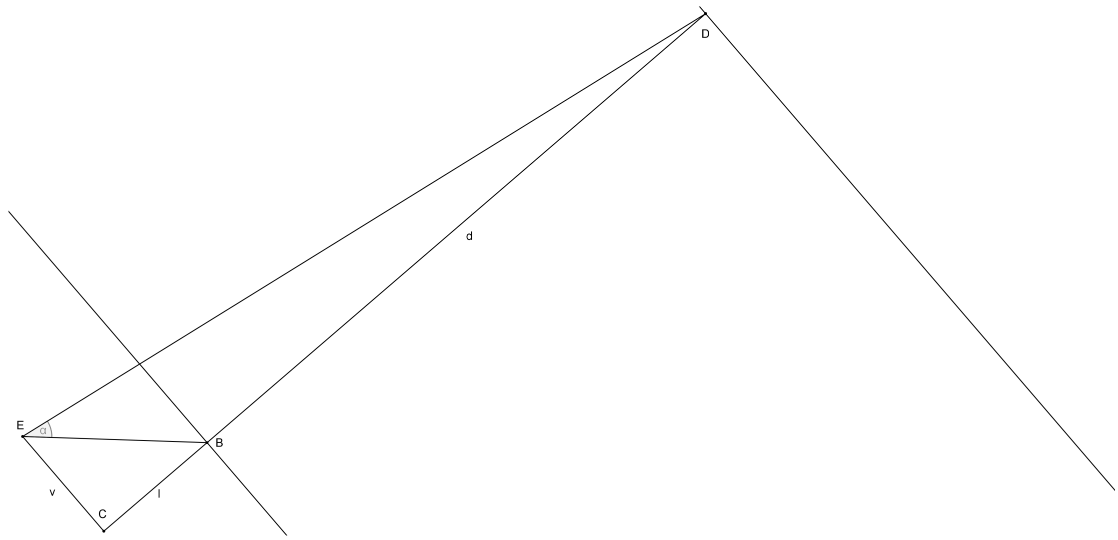
Načrtnul jsem trojúhelník, v němž jsme znali všechny strany, a chybělo dopočítat velikosti úhlů, a Irena správně řekla, že stačí jednou použít kosinovou větu a pak lze použít sinovou. Následně jsme se vrátili k předchozímu náčrtku, což byl trojúhelník zadaný pomocí věty *usu*. K použití sinové věty bylo zapotřebí dopočítat velikost třetího úhlu, což žáci brzy odhalili. Zbytku diagnostických otázek jsme se věnovali v předešlé úloze.

5.5.15 Aplikační úloha

V závěru hodiny jsem žákům nadiktoval svoji aplikační úlohu.

Úloha 5.5.2 (Aplikační úloha) *Pod jakým zorným úhlem je vidět řeka, jestliže je v daném místě široká 58 m a dívám se na ni z budovy vysoké 11 m vzdálené od řeky 12 m?*

Řešení:



Obrázek 5.8: Obrázek k aplikační úloze 5.5.2.

Používejme značení podle obrázku 5.8, kde $d = 58$ m je šířka řeky, $l = 12$ m je vzdálenost budovy od bližšího břehu řeky, $v = 11$ m je výška budovy a α je hledaný zorný úhel. Z pravoúhlého trojúhelníku BCE s pravým úhlem u vrcholu C vypočítáme nejprve podle Pythagorovy věty délku jeho přepony BE. $|BE| = \sqrt{l^2 + v^2}$, dosazením hodnot obdržíme $|BE| = \sqrt{144 + 121} \doteq 16{,}27$. Následně analogicky vypočítáme délku přepony DE pravoúhlého trojúhelníku DCE. $|DE| = \sqrt{(d + l)^2 + v^2} = \sqrt{4\,900 + 121} \doteq 70{,}86$. Pak zbývá použít kosinovou větu v trojúhelníku DBE ve tvaru $d^2 = |BE|^2 + |DE|^2 - 2|BE||DE| \cos\alpha$ s neznámou α. Po dosazení přibližných hodnot obdržíme rovnici $3\,364 = 265 + 5\,021 - 2\,305{,}78 \cos\alpha$, kterou upravíme do tvaru $\cos\alpha = 0{,}83$, tedy $\alpha \doteq 33{,}5°$. Úlohu lze vyřešit i jinými způsoby.

Žákům jsem vysvětlil, co znamená zorný úhel, a vyvolal jsem Irenu, aby načrtla schematický obrázek. Irena obrázek sama zakreslila a naznačila známé údaje. Domnívala se, že musí spočítat velikost úhlu $\angle DBE$ a velikost strany BE (obrázek 5.8). Vypočítala nejprve velikost strany BE, a přestože jsem pak ukončil hodinu, chtěla úlohu dořešit. Vypočítala ještě velikost úhlu $\angle EBC$ pomocí funkce tangens.

Vyvolal jsem tedy Irenu na začátku příští hodiny, aby úlohu vyřešila na tabuli. Nejprve použila Pythagorovu větu pro zjištění velikosti strany BE, následně s mojí dopomocí použila funkci kotangens, aby vypočítala velikost úhlu $\angle EBC$. Vše důkladně zapisovala a překreslovala obrázky. Poté se domnívala, že nejvýhodnější by bylo použít kosinovou větu, což jsem nekomentoval. Třída navrhla raději sinovou, a tak je poslechla. Jeden žák se zeptal, proč nepoužít Pythagorovu větu, a na to konto se ozvalo mnoho žáků, kteří shodně tvrdili, že se nejedná o pravoúhlý trojúhelník a navíc jsme chtěli vypočítat velikost úhlu, což Pythagorova věta neumožňuje. Žáci se až na výjimky orientovali ve významu a použití všech třech vět.

K získání velikosti neznámého zorného úhlu α ještě scházelo dopočítat velikost strany DE. Sinová věta totiž obsahovala dvě neznámé. Poradil jsem Ireně, aby odhalila pravoúhlý trojúhelník DCE, a Irena úlohu následně dořešila. Úloha zabrala necelých osmnáct minut, nicméně považuji to za efektivně strávený čas. Žáci mezi sebou diskutovali o úloze, Irena měla příležitost posílit si své sebevědomí a ukázala, že při řešení těchto úloh je nutné si předem promyslet správnou strategii, která vede k cíli.

5.5.16 Procvičování trigonometrických vět

Žákům jsem rozdal pracovní list s následujícími úlohami.

Úloha 5.5.3 ([Odvárko 2007], s. 109, pozměněné značení) *Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku KLM s vnitřními úhly κ, λ, μ postupně u vrcholů K, L, M, pokud*

a) $k = 38$ cm, $l = 48$ cm, $\kappa = 37°$,

b) $k = 140$ mm, $m = 300$ mm, $\kappa = 71°14'$.

Úloha 5.5.4 ([Odvárko 2007], s. 129) *Na vrcholu hory stojí věž hradu vysoká $v = 30$ m. Křižovatku silnic v údolí vidíme z vrcholu věže a od její paty v hloubkových úhlech $\alpha = 32°50'$, $\beta = 30°10'$. Jak vysoko je vrchol hory nad křižovatkou?*

Úloha 5.5.5 ([Odvárko 2007], s. 129) *Ze stanice vyjedou současně dva vlaky po přímých tratích, které svírají úhel $\phi = 156°30'$. Rychlost prvního vlaku je $v_1 = 13$ m/s, rychlost druhého vlaku $v_2 = 14{,}5$ m/s. Jak daleko budou od sebe za $5\frac{1}{2}$ minuty?*

Úloha 5.5.6 ([Odvárko 2007], s. 109) *Určete velikosti vnitřních úhlů a poměr délek stran trojúhelníku, jestliže platí $a : b = 2 : 3$, $\alpha : \beta = 1 : 2$.*

Žáky jsem postupně vyvolával k tabuli. Karolína s Helenou první úlohu až na malé drobnosti zvládly. Okomentoval jsem počet řešení jednotlivých úloh. Další úlohu řešili dva žáci, přičemž první byl schopen situaci pouze částečně zakreslit s mým vysvětlením, co znamená hloubkový úhel. Úlohu měl dořešit Honza, ovšem než se v náčrtku zorientoval, zazvonilo.

Následující hodinu jsme psali písemnou práci. Každá varianta obsahovala úlohu na vyvozování trigonometrických vět, důkazovou úlohu a další tři početní úlohy. Mnoho žáků mělo problém po dosazení hodnot do trigonometrických vět správně dopočítat neznámou. Vybral jsem pro ukázku odpovědi některých žáků na následující úlohu z písemné práce.

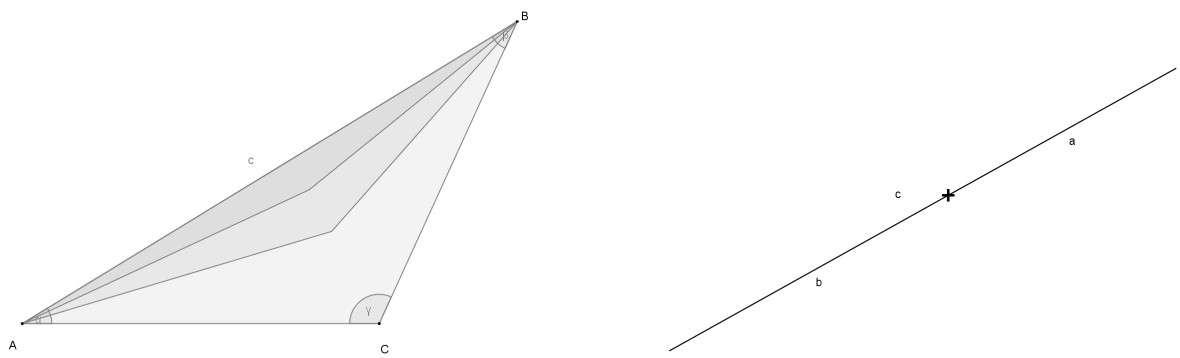
Úloha 5.5.7 *Popište proces vyvozování kosinové věty pomocí omezování c^2 v tupoúhlém trojúhelníku ABC s tupým úhlem γ, tj. napište, co platí pro trojúhelníky a co pro z nich vzniklou úsečku. Lze použít trojúhelníková nerovnost.*

Tomáš nakreslil obrázek 5.9 s komentářem: „Součet stran a, b je větší než c, ale při zmenšování se součet zmenšuje, až dosáhne délky c.“ Honza nakreslil velmi podobný obrázek, rozkresluje jeho části samostatně (obrázek 5.10), ovšem bez komentáře. Další dva žáci správně vyjádřili c^2 pro tupoúhlý trojúhelník i úsečku.

5.6 Výuka v sextě

5.6.1 Vlastnosti trojúhelníků

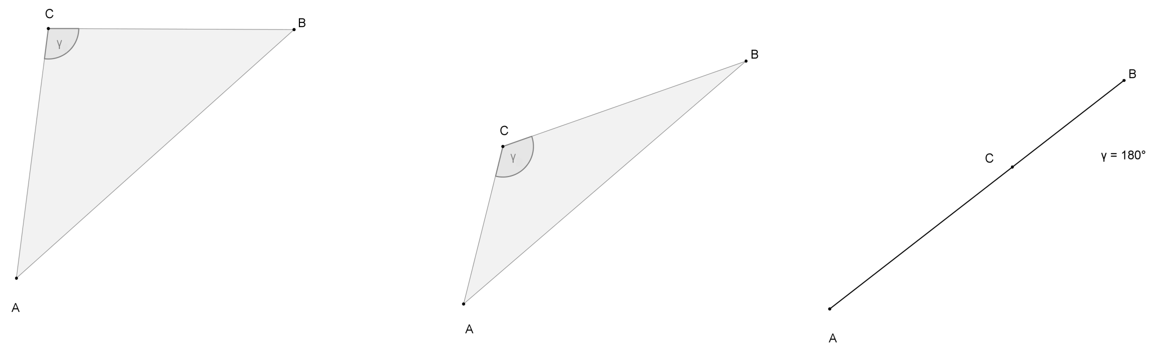
Po sdělení základních organizačních informací týkajících se natáčení a kalkulaček jsem na tabuli nakreslil pravoúhlý a obecný trojúhelník bez popisu. Zeptal jsem se po jejich společných a odlišných vlastnostech. Nejprve zazněl součet vnitřních úhlů, dále Pythagorova věta. Jelikož jsem ji chtěl zapsat pomocí vzorce, označil jsem pravoúhlý trojúhelník klasicky s vrcholem C u pravého úhlu. Také zaznělo, že trojúhelníky mají tři strany a tři vrcholy, tři výšky a tři těžnice, což jsem ani nezapisoval. Následně žáci zmínili goniometrické funkce. Žáci neuvedli trojúhelníkovou nerovnost, tak jsem se zeptal: „Co taková ta pomůcka, která stanoví, že, stanoví vztah mezi třemi stranami. Jak je to tam? No, aby to byl trojúhelník, tak co musí platit?“ Na to žákyně odvětila: „Součet dvou stran musí bejt větší než třetí strana.“ Přešel jsem nepřesné vyjadřování a uzavřel jsem úvodní opakování slovy: „Smyslem dnešní hodiny bude zobecnit tu Pythagorovu větu pro ten libovolný trojúhelník. Abychom se vlastně dostali k tomu, jak vypočítat strany v libovolném trojúhelníku, nepravoúhlém. V pravoúhlém už to znáte.“



Obrázek 5.9: Obrázek objasňující odpověď Tomáše na úlohu 5.5.7 v písemné práci.

5.6.2 Příprava izolovaných modelů

Mezitím jsem nechal žákům rozdat pracovní listy (obrázek 5.1), které jsem okomentoval. Vysvětlil jsem žákům, že smyslem jejich samostatné práce je vyplnění prvních pěti sloupců tabulky. Žáci se pustili do práce buď samostatně, nebo ve dvojicích. Úlohu vcelku zvládali, někteří se ptali na přesnost a zaokrouhlování.



Obrázek 5.10: Obrázek objasňující odpověď Honzy na úlohu 5.5.7 v písemné práci.

5.6.3 Závislost na velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku

Zapsal jsem mezitím na tabuli dvakrát vedle sebe výrazy c^2 a $a^2 + b^2$ a jakmile se žáci chýlili k závěru vyplňování tabulky, zeptal jsem se jich: „Jaké znaménko sem můžu napsat? Samozřejmě nebude to rovnítko, protože ty trojúhelníky až na jeden nejsou pravoúhlé.“ Odpověděl mi Josef: „Větší.“ Ještě jednou jsem se nechal od Josefa ubezpečit a komentoval jsem svůj zápis: „Tak já napíšu větší a funguje to pro všechny trojúhelníky?“ Josef nesouhlasně vrtěl hlavou, tak jsem pokračoval: „Nefunguje. To je právě chyba. Dá se tam vypozorovat nějaký pravidlo? Že třeba pro nějaký typ trojúhelníků to bude větší?“ Nechal jsem žáky chvíli přemýšlet a poté jsem doplnil: „Vidíte v tom nějakou spojitost, že $c^2 > a^2 + b^2$, ale vidíte, že ne ve všech případech. Jsou tam případy, kdy to větší není.“ Marie mi po chvíli odpověděla: „Větší než devadesát stupňů.“ Doptal jsem se jí: „Co je větší než devadesát stupňů?“ Marie odvětila: „Jeden úhel.“ Jelikož ostatní žáci stále dumali nad svými pracovními listy a příliš nás neposlouchali, řekl jsem: „Takže pokud je to, já to přeložím, tupoúhlý trojúhelník, tak bude platit tohle. Souhlasí s tím všichni?“ Pod výraz $c^2 > a^2 + b^2$ jsem zapsal „tupoúhlý trojúhelník“. Většina žáků poté správně odhadla, že pro ostroúhlý trojúhelník by měla platit opačná nerovnost. Komentář k této části uvádím v oddíle 5.7.1.

5.6.4 Omezení c^2 v tupoúhlém trojúhelníku

Zopakoval jsem následně, že naším úkolem je odhadnout, o kolik větší by mohlo být c^2 v tupoúhlém trojúhelníku, či rozhodnout, zda je c^2 něčím omezené či nikoliv. Žáci rozhodli, že c^2 je konečné, tak jsem jim zadal úkol nakreslit libovolný tupoúhlý trojúhelník a řekl jsem: „Teď se budeme snažit ten tupoúhlý trojúhelník převést na nějaký jiný obrazec, aby tam samozřejmě ta strana c zůstala zachována, protože tu se snažíme vypočítat, tak aby se nám nezměnila. Tak co vás napadá, jaký obrazec bychom mohli z toho tupoúhlého trojúhelníku udělat?“ Komentář k této části je popsán v oddíle 5.7.1.

Žáci příliš nespolupracovali, tak jsem se jich za okamžik zeptal jinak: „Tak máme tupoúhlý trojúhelník, jak ho změníme, aby se tam zachovala ta strana c?“ Žáci ještě obkreslovali můj náčrtek, nicméně zazněl první nápad předělat jej na pravoúhlý trojúhelník. Dokreslil jsem proto čárkovaně pravoúhlý trojúhelník s přeponou c a podotknul jsem, že pro něj by platilo rovnítko. Zavrhnul jsem tuto myšlenku, načež jistý žák se tázal po zadání k tomuto obrázku. Znovu jsem mu vysvětlil, co bylo smyslem této práce.

Potvrdil jsem potom domněnku žáka, který tvrdil, že v tom bude hrát roli úhel. Byl jsem nucen přistoupit ke konkrétnějším otázkám: „Tak co s tím tupým úhlem γ, můžeme ho nějak zvětšovat? Můžeme ho nějak zvětšovat, aniž bychom zanechali tu stranu c tak, jak je stejně veliká?“ Opět jsem se nedočkal odpovědi, tak jsem žáky ujistil, že: „c je pevně dané, to musí zůstat stejně dlouhé. Teď budeme operovat s tím úhlem γ.“ Žáci se stále neprojevovali, proto jsem se dotázal: „Věděli byste třeba, jak ten trojúhelník převést na úsečku? Jak z toho tupoúhlého trojúhelníku dostanu úsečku? Napadne vás nějaký způsob, jak zvětšovat ten úhel γ, abychom vlastně z trojúhelníku dostali úsečku?“ Konečně se ozval Martin, kterého jsem vyvolal k tabuli. Dokreslil do náčrtku další dva „tupoúhlejší trojúhelníky“ (obrázek 5.3), což jsem komentoval slovy: „Vidíte vlastně, že ten úhel γ teď se vlastně bude zvětšovat tak, jak ty strany a, b budou směřovat blíže k té straně c. Až pak nakonec dojdu k tomu, že ten bod C, tady je, dejme tomu, nějaký bod C', ten se mi objeví na té straně AB.“ Popsal jsem jej jako C''.

Zeptal jsem se dále žáků, jak lze vyjádřit délka úsečky AB. Žáci opět příliš nespolupracovali, přesto jsme se s mojí pomocí dostali k tomu, že pro úsečku platí $c = a + b$. Možné důvody těchto těžkostí komentuji v oddíle 5.7.1. Žáci vyvodili, čemu se rovná c^2, takže na tabuli byl napsán následující výraz:

pro úsečku $\quad c = a + b$

$$c^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

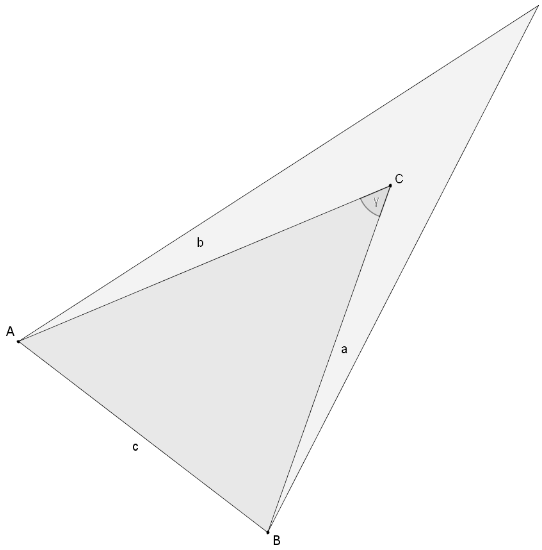
Zopakoval jsem, že tento vztah platí pro úsečku, a jak jsme se k této úsečce dostali. Položil jsem žákům otázku, jestli by v tupoúhlém trojúhelníku dokázali c^2 omezit. Žáci se nijak neprojevovali, proto jsem je odkázal na vyplněné pracovní listy. Načež zareagovala Marie: „c^2 je větší než $a^2 + b^2$." Zapsal jsem to a analogicky mi Marie zodpověděla i druhé omezení. Zeptal jsem se žáků, jestli by věděli, proč je $(a + b)^2 > c^2$. Žáci nereagovali, proto jsem do náčrtku opět dokreslil pravoúhlý trojúhelník s přeponou c a okomentoval jsem všechna tři různá vyjádření c^2. Na tabuli jsem dopsal výraz

$$a^2 + b^2 < c^2 < (a+b)^2.$$

5.6.5 Omezení c^2 v ostroúhlém trojúhelníku

Podotknul jsem, že se vrátíme k ostroúhlému trojúhelníku, načež jsem jej načrtnul na tabuli. „A podobným postupem se v tom ostroúhlém trojúhelníku budeme snažit vyjádřit to c^2. Zatím jsme teda nedošli k tomu rovná se, ale zase se ho budeme snažit nějak omezit. Má někdo nějaký nápad, jak změnit ten ostroúhlý trojúhelník?" Ozval se Josef: „Zvětšovat ty úhly tak, aby se nám zase..." Vyvolal jsem jej k tabuli a po chvíli přemýšlení jsme dospěli k tomu, že Josef začal zmenšovat úhel γ, zvětšovat úhly α, β a strany a, b, ponechávaje tak stranu c nezměněnou. Snažil se tak napodobit postup z tupoúhlého trojúhelníku, leč špatným způsobem (obrázek 5.11).

Apeloval jsem na překlopení strany c: „Ale tu stranu c můžu přece nějak překlopit tak, jako jsem tady překlopil ty strany b a a." Josef si uvědomil svoji chybu, přikreslil tupoúhlý trojúhelník a vysvětlil mi jiný postup: „Tady α je tupý úhel a tady z toho γ se nám stane to α a to se bude posouvat na tu stranu." Chtěl jsem, aby to dokreslil: „Výborně, výborně. Tak zakreslete, když úhel γ zanikne, jak to bude vypadat, ten poslední obrázek, ten takzvaný limitní přechod, když to přeženeme." Josef mi vysvětlil, kde by se ocitl bod A a kde by byly změněné strany c a b (obrázek 5.12). Tentokrát to pochopil tak, že délku strany a ponechá a strany b, c bude zmenšovat, dokud $\alpha = 180°$. Příliš jsem mu nerozuměl, proto jsem jej interpretoval: „Takže váš spolužák zase řekl, než teda jsme byli vyrušeni, že teďka ten úhel γ zmenšujeme. Takže až ho zmenšíme do té míry, že tady vznikne úsečka CB, na níž je bod, dejme tomu, A', a ta úsečka CB je součet původních stran $c+b$. To znamená, já můžu psát, že ta strana a je $c+b$ v tom ostroúhlém trojúhelníku, nebo lépe řečeno, v té úsečce, na který se ten ostroúhlý trojúhelník dostane zmenšováním toho úhlu γ k nule.“ Komentář k této části je uveden v oddíle 5.7.1.



Obrázek 5.11: Obrázek zachycující první pokus Josefa o vyjádření změny ostroúhlého trojúhelníku.

Vyjádřil jsem dále stranu c, celou rovnici umocnil a spolu se žáky rozepsal dvojčlen, tudíž na tabuli bylo nakonec zapsáno:

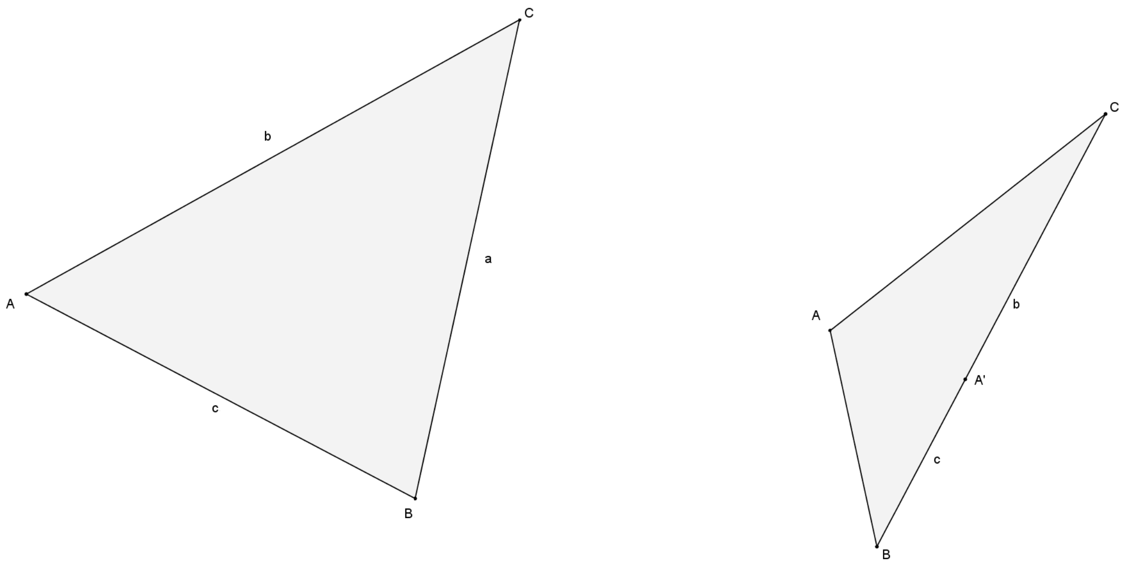
$$\gamma \to 0 \qquad \text{úsečka :} \qquad a = b + c$$

$$c = a - b$$

$$c^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Ptal jsem se dále žáků na omezení c^2 v ostroúhlém trojúhelníku. Žáci nejprve řekli, že $c^2 < a^2+b^2$, což jsem zapsal s komentářem, že to vyplynulo z vyplněných pracovních listů. Následně zmínili i zbytek, tedy že $c^2 > (a-b)^2$. Na tabuli jsem to zapsal v roznásobeném tvaru

$$a^2 - 2ab + b^2 < c^2 < a^2 + b^2.$$



Obrázek 5.12: Obrázek zachycující druhý pokus Josefa o vyjádření změny ostroúhlého trojúhelníku.

5.6.6 Zobecnění vztahu

Shrnul jsem, k čemu jsme prozatím dospěli, zapsal jsem tři různá vyjádření c^2 pomocí svorky a u každého z nich jsem se žáků tázal, pro kterou velikost úhlu γ platí. „Máme tři, tři extrémní případy, jak vyjádřit to c^2. Pořád teda nemáme nějakou obecnou formulku, která by to vyjadřovala, jenom tři, tři konkrétní případy, již teda samozřejmě ty dva, to nejsou trojúhelníky, to jsou úsečky. Tak a teďka bude vlastně naším úkolem to zobecnit, najít nějaký obecný předpis pro to c^2. Píšu c^2 rovná se. Co tam bude vždycky v tom c^2?“ Žáci správně odpověděli, že $a^2 + b^2$, což jsem zapsal a tázal se dál: „A pak tam bude co? Já tam napíšu schválně minus. Minus. Prosím? Vidíte, že to na něčem závisí, tak se pokuste přijít, na čem to závisí ta, ten poslední člen.“ Žáci se příliš neprojevovali a spíše čekali, jak budu dál pokračovat. Tak jsem je chvilku nechal a zeptal se znovu: „Na čem závisí, jak bude vypadat ten poslední člen?“ Nechtěl jsem to dodělat sám, takže jsem je opět chvilku nechal přemýšlet a pak se tázal: „Co tam teďka můžu napsat sem? Tam musím ještě něco napsat, to vidíte, že to nekončí.“

Žáci stále neodpovídali, tak jsem jim poradil: „Bude tam nějaká funkční závislost na některém z prvků toho trojúhelníku. Bude to nějaká strana, a, b?“ Marie odpověděla:

„Na úhlu γ.“ Dále jsem zaslechl: „Děleno dvěma.“ Tak jsem se doptal a žák měl na mysli: „Ten úhel děleno dvěma.“ Odpověděl mu jiný žák: „Ne, to je blbost.“ Potvrdil jsem jeho domněnku poukázáním na vyjádření c^2 pro $\gamma = 0°$: „Protože tady bych dostal rovnou nulu, že jo, tak to asi nejde. No ale na tom úhlu γ to záviset bude, to máte pravdu.“ Chvilku jsem je nechal přemýšlet a pak se zeptal: „A to a, b tam bude vždycky? Teda to $2ab$ dejme tomu?“ Slyšel jsem od žáků souhlasné projevy, tudíž jsem dopsal $2abf(\gamma)$. „Krát nějaká funkční závislost na γ, na což jsme tady přišli společně. Tohleto je, že je tady nějaká funkce, která závisí na úhlu γ v tom klasicky označeném trojúhelníku ABC.“

5.6.7 Izolované modely

Navedl jsem žáky na vyjádření $f(\gamma)$ ze vztahu 5.2 a vypočítání hodnot tohoto výrazu z parametrů trojúhelníků na pracovních listech (obrázek 5.1). Doporučil jsem žákům změřit úhly v trojúhelníku a ozřejmil jsem jim náš cíl nalézt funkci f. Žáci se pustili do práce, do zbytku hodiny jsem je obcházel a přiměřeně jsem jim pomáhal. Komentář k této části jsem popsal v oddíle 5.7.2.

Na třetí hodině jsem rozdal tabulky s parametry trojúhelníků, zapsal jsem vztah 5.2 a požádal jsem žáky o vyjádření $f(\gamma)$. Přihlásila se žákyně, která vyjádřila

$$\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} = f(\gamma).$$

Zeptal jsem se žáků, jaký tvar by měl vztah 5.2, pokud bych znal úhel β. Nakreslil jsem proto trojúhelník s vyznačeným úhlem β a žáci mi nadiktovali správné znění, analogicky to probíhalo s úhlem α. Rozdělil jsem žáky podle lavic, v nichž seděli, za účelem vypočtení třech číselných hodnot, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ a $f(\gamma)$. Zvolil jsem k tomu trojúhelníky II, IV a V (obrázek 5.1). Vysvětlil jsem žákům, že všechny parametry a, b, c jsou k nalezení v tabulce, a jakmile začali počítat, tak jsem je obcházel. Jeden žák se mě dotazoval, jestli výraz, který platí pro $f(\gamma)$, bude platit i pro dvě zbývající neznámé. Vysvětlil jsem mu, že nikoliv, a poukázal jsem na postup, který napsala žákyně na tabuli při vyjádření $f(\gamma)$.

Na tabuli jsem mezitím připravil tabulku x a $f(x)$ představující velikost úhlu a funkční hodnotu tohoto úhlu. Zachytil jsem hovor žáka Filipa: „Už jsem blízko rozřešení, třicet osm děleno dvaceti devíti, kurník a je to blbý, jedna celá tři. Třicet osm děleno dvaceti devíti. Nějak mi to nevychází. Jako ta jedna polovina, to mi podle mě vychází dobře, to α, to β je nějaký divný. Se mi to γ už nechce počítat. Už na to ani ...“ Je zvláštní, že někteří žáci tušili, že výsledky větší než jedna nejsou správné. Jako kdyby očekávali nějakou goniometrickou funkci. Je také možné, že si výsledky porovnávali mezi sebou. Cenná je také informace o nezáživnosti tohoto mechanického počítání, kteroužto komentuji v oddíle 5.7.1.

Když většina žáků přestávala pracovat, přerušil jsem je: „Já jsem tady napsal x a $f(x)$, toto x bude teďka zahrnovat všechny ty α, β, γ, které jste počítali, to znamená, že to $f(x)$ bude zahrnovat všechny ty $f(\alpha)$, $f(\gamma)$, $f(\beta)$, které jste vypočítali.“ Vyvolal jsem některé žáky k vyplnění tabulky. Když byla tabulka vyplněná, vysvětlil jsem žákům ještě jednou smysl tabulky. Podotknul jsem, že se v tabulce jedna funkční hodnota opakuje. Podtrhnul jsem ony hodnoty a vysvětlil jsem, že se v obou případech jedná o funkční hodnoty 45°. Vysvětlil jsem, že to může sloužit pro kontrolu, a nepřesnosti jsem zdůvodnil přibližným měřením nebo zaokrouhlením.

5.6.8 Objevení funkce kosinus

Načrtnul jsem na tabuli osy pro budoucí graf a objasnil jsem žákům důvod kreslení grafu i způsob jeho zakreslení. Hodnoty jsem za účelem rychlejšího a přesnějšího vykreslení po zkušenostech z druhého ročníku vynesl do grafu raději sám. Když jsem skončil, postěžoval jsem si, že graf obsahuje pouze diskrétní nicneříkající body. Po chvíli diskuze se ozval Ondřej: „Asi je spojíme.“ Zeptal jsem se jej jak a on rukou naznačil „velmi klikatou křivku“. Pokračoval jsem dál: „Můžeme je vůbec spojit? Teďka jsme udělali pro několik úhlů, jo, jsme to vypočítali. Samozřejmě, že ten trojúhelník, v trojúhelníku jich je mnohem víc, takže i těch funkčních hodnot by bylo mnohem víc.“

Opustil jsem téma spojitosti hledané funkce a po chvíli jsem pokračoval: „My se ještě zamyslíme nad tím, jaké, jaké funkce jste třeba probírali. Jaká funkce by šla na tohle napasovat? Která funkce má třeba v argumentu úhel?“ Ve třídě bylo ticho, zopakoval jsem svoji otázku: „Nějakou funkci, která by odpovídala přibližně těm hodnotám.“ Několik žáků nezávisle na sobě odhadovalo funkci kosinus. Nevěřícně jsem se jich tázal: „Kosinus, myslíte?“ Žáci souhlasili, jeden řekl: „V devadesáti stupních je nula.“ Dodal tak další hodnotu, která v grafu na tabuli scházela. Nepotvrdil jsem to, ani nevyvrátil. Chtěl jsem žáky znejistit: „A nebude to sinus, třeba?“ „Ten je v devadesáti stupních jedna,“ ozvala se žákyně. Tento fakt jsem potvrdil a zeptal jsem se: „Zdá se to všem, že by to mohl být kosinus?“ Žáci příliš nereagovali, tak jsem diskrétní body grafu propojil a doprovodil jsem to slovy: „Když to takhle propojím, tak opravdu to vypadá jako nějaký, jako část funkce kosinus.“ Ozřejmil jsem žákům, že funkce kosinus je námi hledaná funkce f, a zapsal jsem na tabuli kosinovou větu (vztah 5.3). Podotknul jsem, že se jedná pouze o hypotézu, kterou je nutno ověřit, a nazval jsem ji kosinovou větou.

5.6.9 Důkaz kosinové věty

Následně jsem provedl za nevýrazné pomoci žáků důkaz kosinové věty v ostroúhlém trojúhelníku pro úhel β. Ukázalo se, že žáci neznají vzorec $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$. Doplnil jsem, že jsme tímto dokázali naši domněnku vyjádřenou pro jiný úhel a vysvětlil jsem žákům, že záměnou písmen jsme dokázali vztah 5.3. Blížil se závěr hodiny, tak jsem žákům doporučil, aby si důkaz opsali. Někteří tak činili, jiní debatovali o důkazu ve dvojicích a jiní jen znuděně vyčkávali na zazvonění.

5.6.10 Diagnostika porozumění kosinové větě

Na následující hodině jsem zapsal kosinovou větu na tabuli a zeptal jsem se: „Čeho se ta kosinová věta týká? Kde ji mohu upotřebit?“ Žáci, zřejmě pod vlivem důkazu na konci předešlé hodiny, tvrdili, že ji lze použít v ostroúhlém trojúhelníku. „V tupoúhlém to nejde?“, reagoval jsem. Martin navrhoval, abychom z tupoúhlého trojúhelníku vytvořili dva ostroúhlé. Tuto myšlenku jsem zavrhnul a prozradil jsem žákům, že věta platí ve všech trojúhelnících. Pokračoval jsem dál: „Znám tyto části trojúhelníku, dvě strany a úhel γ. Ten úhel je jimi sevřený. Takže pak bych počítal to c^2, jo? Tomu asi každý rozumí. Tak, dejme tomu, že teď neznám γ, nýbrž β.“ Ozval se Josef: „Změním hodnoty.“ Tomu jsem neporozuměl, takže jsem se zeptal: „Změním hodnoty, můžu místo γ napsat β?“ Josef odpověděl: „Ne, to ne, ale písmenka...“ Už jsem pochopil, jak to myslel a uvědomil si, že žáci rozumějí záměně písmen, proto jsem zapsal kosinovou větu ve tvaru 5.4. „To znamená, známe a, b a β, to znamená, že bysme počítali c. Museli bysme si vyjádřit c z této rovnice, jo? A tak dál.“

Dále jsme se s žáky dopracovali k tomu, že dle kosinové věty je úhel dvěma stranami sevřený. Načrtnul jsem poté trojúhelník PQR a zadal žákům úkol zapsat kosinovou větu, známe-li strany q, r a úhel ϕ u vrcholu P. Vyvolal jsem žáka k tabuli, který napsal

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos\phi.$$

Třída nesouhlasila, tak jsem vyvolal jiného žáka, aby to opravil. Žák se odebral k tabuli a já mu znovu vysvětlil, co po něm chci. Za pomoci spolužáků napsal pod chybné vyjádření

$$p^2 = r^2 + q^2 - 2rq\cos\phi.$$

Nyní už třída souhlasila, tak jsem žáka poslal sednout a zeptal se na souvislost mezi Pythagorovou a kosinovou větou. Filip tvrdil, že obě vycházejí z trojúhelníku. Jiný žák se domníval, že hledáme to samé. Třetí hlas řekl, že známe jeden úhel. Všechny tyto nápady jsem náležitě komentoval, načež se přihlásila Marie: „Že ta Pythagorova věta je zjednodušená kosinová věta?“ Nebyl jsem si jist, že všichni žáci myšlenku pochytili, tak jsem se doptal, ukazuje na člen $\cos\phi$: „Co se stane, když sem dosadím devadesát stupňů?“ „Bude to jedna,“ odpověděl žák. „Tak je to jedna? Kosinus devadesáti je jedna?“ Tentýž žák: „Ne, vlastně ne, nula.“ „Tak vidíte, já jsem si to hned myslel.“ Třída se zasmála, tak jsem to vzal také humorně: „Takže se mi z toho stane určitě „pytlákova“ věta. Vidíte všichni tu souvislost? Že vlastně Pythagorova věta je jenom speciální případ té kosinové věty.“

Napsal jsem dále na tabuli chybný vztah 5.5 s otázkou, jestli také platí. Žáci byli zaujati předchozím divadelním výstupem a nebáli se tipovat. Požádal jsem je proto o konstruktivnější návrh s argumentací zdůvodňující jejich názor. Žáci tvrdili, že takhle libovolně nelze funkce zaměňovat, což jsem zdůvodnil dosazením $90°$ za γ, načež jsem tento výraz škrtnul.

5.6.11 Motivace pro objevování další trigonometrické věty

Chtěl jsem plynule přejít k objevování sinové věty, tudíž jsem zadal úlohu. Načrtnul jsem trojúhelník ABC, ve kterém známe $a = 5$, $b = 4$, $\alpha = 60°$ a zajímáme se o stranu c. Nechal jsem žákům několik minut a pak jsem je nechal hlasovat, jestli lze kosinovou větu vůbec použít. Žáky jsem příliš nezaktivizoval, ale nakonec jsem zaslechl: „To by musel bejt jinej úhel“, což jsem potvrdil. Dopsal jsem za tím účelem třetí vyjádření kosinové věty s úhlem α. Někteří žáci již zřejmě zamýšleli použít tento tvar kosinové věty dosazením a vyřešením kvadratické rovnice. Avšak to nebyl můj cíl, proto jsem žáky rozesadil do skupin s tím, že k úloze se vrátíme.

5.6.12 Hledání největšího z poměrů

Rozdělil jsem skupinám trojúhelníky a vysvětlil jim zadání úkolu na hledání největšího z poměrů $a : \sin\alpha$, $b : \sin\beta$, $c : \sin\gamma$. Obešel jsem všechny skupiny, žádné jsem nemusel pomáhat. Třetí skupina byla hotova poměrně rychle, zřejmě díky nadání některých žáků. Druhá skupina dopočítávala sinus posledního úhlu, podobně první skupině chybělo dodělat poměry. Čtvrté skupině scházelo dopočítat poslední sinus, zatímco pátá skupina rozšiřovala desetinná čísla poměrů na celá. Snažili se všechny poměry sobě přiblížit ještě před vydělením a porovnat je tím způsobem, že budou mít stejné dělitele, lišit se tak budou pouze v dělenci. Šesté skupině scházelo dopočítat poměry.

Divil jsem se, že poměry vychází podobně. Žáci tvrdili: „No, to je stejný. Určitě jo. To určitě bude, protože když se kouknete na ten šestej trojúhelník, tak ... (nesrozumitelné).“ Třetí skupina tvrdila, že třetí poměr je největší (jen o kousek). Zdůvodňovali to následovně: „Že ten třetí trojúhelník je, má podobně dlouhý ty, strany a je pravoúhlej.“ Podle druhé skupiny byly dva poměry shodné, a první určila jako největší poměr $a : \sin\alpha$.

Jakmile měli žáci vypočítáno, ukončil jsem skupinovou práci. Vybral jsem schválně pátou skupinu, která se zabývala poměry odlišným způsobem. Požadoval jsem po zapisovatelce Martině výsledek, avšak napsala pouze poměry $1\,260 : 91$, respektive $1\,430 : 91$. Rozdíl těchto dvou čísel byl příliš velký, aby byl způsoben pouze chybným rýsováním, měřením nebo zaokrouhlováním. Třída se skupině smála, že nepochopili zadání, vydělit dvě čísla poměru. Je tedy zřejmé, že ostatní vůbec nevěděli, že i tímto způsobem lze úlohu vyřešit.

Martina vypočítala a zapsala: $1\,430 : 91 = 15{,}7142$. Stále jsem tomu nerozuměl: „To máme jeden výsledek, teda, jo?“ Martina odpověděla: „Ne, to je ten největší poměr.“ Upozornil jsem ji, že bych rád viděl na tabuli všechna tři čísla, a poukázal jsem na to, že předpokládaným postupem řešení bylo vydělení čísel poměru. Martina následně dopsala výsledky po vydělení poměrů; 14 a 13,8461. Podle původního záměru by tedy napsala $1\,260 : 91$, $1\,274 : 91$ a $1\,430 : 91$. V oddíle 5.7.1 podávám komentář k této části.

Snažil jsem se Martinu přimět k vysvětlení jejich postupu: „Když už tady máme to dělení, co tady máme za čísla? 1 430, to je docela velký číslo na to, že máme trojúhelníky a měřili jsme to v centimetrech.“ Martina odpověděla: „No protože jsme to určovali z těch poměrů bez vydělení, takže jsme museli počítat velký čísla.“ Nechápavě jsem se jí tázal: „Jo takhle, vy jste si převedli desetinný číslo, které jste tady přidali nějaký, já tomu nerozumím.“ Martina vysvětlovala: „No, my jsme to nějak roznásobili.“ Zeptal jsem se teda: „Co znamená číslo 1 430?“ Žáci skupiny nebyli schopni odpovědět, že se jedná o původní délku strany trojúhelníku rozšířenou v poměru za účelem převedení poměrů na společného dělitele.

Nepřišlo mi vhodné, abych tuto myšlenku sám vysvětloval, a kvůli chybě v největším poměru jsem vyvolal druhou skupinu, o níž jsem věděl, že počítali tradičně. Žákyně napsala na tabuli jak poměry, tak desetinná čísla, která jsem komentoval následovně: „Máme tři čísla, 4,16 je tam dvakrát, 4,24 je ten největší poměr. Tak, a co teďka z toho lze usuzovat? Asi vám všem vychází dost podobná čísla. V ostatních skupinách, co jsem tak viděl, vždycky vyjde ten poměr dost podobný. Tady třeba 8,49; 8,48; 8,5. To znamená, že pro každý ten trojúhelník vychází jiný číslo, to je pravda, ale vždycky dost podobný nebo skoro stejný. Takže, coby, jak by se to dalo zobecnit? Kdybych přešel od těch čísel, kdybych přešel k těm poměrům? Jak by se to dalo zobecnit?“ Žáci mě nechápavě pozorovali, takže jsem po chvilce zopakoval: „Ptám se znova. Přejdu od těch čísel k těm písmenům, k těm poměrům, jo? Jak se to dá zobecnit, když tadyty čísla jsou de facto stejná až na nějakou chybu, která mohla vzniknout špatným měřením, špatným počítáním, zaokrouhlením a tak podobně, nebo špatným narýsováním. Tak co se dá napsat pro ty poměry, že jsou stejné.“ Zapsal jsem na tabuli pouze slovní vyjádření „poměry jsou stejné“ a vyvolal jsem Marii, aby to zapsala matematicky. Na tabuli se objevil výraz 5.6. Potvrdil jsem, že toto zobecnění platí pro všechny trojúhelníky z pracovního listu (obrázek 5.1).

Zeptal jsem se, jestli by toto tvrzení platilo i v libovolném trojúhelníku. Žáci si nebyli jisti, proto jsem upozornil na potřebu důkazu. Zeptal jsem se jich dále na smysluplnost výrazu 5.6. Jistý žák prohlásil, že nemá smysl, když se nejedná o trojúhelník, což zdůvodnil tím, že α by muselo nabývat nuly, sto osmdesáti nebo tři sta šedesáti stupňů. Jeho myšlenku jsem zopakoval, sinovou větu jsem podtrhnul a pojmenoval.

5.6.13 Dořešení úlohy

Důkaz věty jsem z časových důvodů přeskočil a vrátili jsme se k úloze ze začátku hodiny. Jelikož žáci stále seděli pospolu, zadal jsem úlohu na vyřešení skupinám. Při obcházení třídy jsem zjistil, že Marie řešila úlohu kosinovou větou přes kvadratickou rovnici. Filip si opět mluvil pro sebe: „Mně se to nechce rýsovat. Alfa lomeno sinus alfa. Sinus alfa, kurnik, to je jedna polovina. Takže a lomeno, áčko je kolik? Pět, žádná celá pět. Kolik je pět lomeno žádná celá pět? Deset, to je dobrý." Žák si zřejmě za účelem dopočítání úhlu β, respektive γ vypočítal poměr s vědomím, že je konstantní.

Určitá skupina žáků řešila úlohu kosinovou větou, přestože věděli, jak ji vyřešit sinovou. Tvrdili, že pokud použijí sinovou větu, bude to složitější. Je pravda, že jim stačilo pouze jednou použít kosinovou větu. Tato úloha ukazuje, že vnímání obtížnosti výpočtů bylo individuální, tudíž nemělo význam určovat, za jakých okolností byla sinová věta jednodušším postupem než kosinová nebo naopak. Někdo zvolil raději kosinovou větu s mechanickým řešením kvadratické rovnice bez nutnosti přílišného uvažování, jiný viděl snazší cestu v logice poměrů a v dopočítání třetího vnitřního úhlu do 180°. O rozhodování při výběru dané trigonometrické věty píšu v oddíle 5.7.1.

Filip pokračoval: „Nula celá pět. Takže čtyři lomeno nula celá pět se rovná. Kolik? Já přemejšlim. Já se musim zeptat." Očividně se ve výpočtu ztratil. Pomohl mu jeho soused: „Štyry děleno kolik? Nula celá štyry, dycky, hele, tak ten poměr, že jo, těch stran, těch stran je, já nevim, asi deset. Když máš štyry, tak víš, že to bude žádná celých štyry. Teď potřebuju v kalkulačce zjistit, pro jakej úhel se rovná nula celá štyry sinus." Filip mu odpověděl: „Počkej, počkej, to není taková sranda. To vůbec není tak jednoduchý. Máš deset... (nesrozumitelné)." Žáci si naprosto vystačili sami.

Na následující hodině jsem vyvolal k tabuli Josefa, aby vyřešil úlohu, přičemž jsem změnil zadání a nejprve jsem chtěl, aby našel velikost úhlu β. Josef zapsal kosinovou větu ve tvaru 5.3; prozradil jsem, že takto ji nelze použít. Dále jsem upozornil na kvadratickou rovnici při jiném zápisu kosinové věty a nastínil postup při použití věty sinové. Josef měl s úlohou četné problémy, proto jsem mu občas pomáhal. Josef přes mé rady trval na tom, že délku c nalezne pomocí kosinové věty, která vedla ke kvadratické rovnici. Vyvolal jsem proto k tabuli Elišku, aby vše vyřešila sinovou větou na druhém křídle tabule. Žáci tak měli možnost vidět před sebou oba postupy a následně je porovnat. Její správný postup jsem okomentoval a poukázal jsem na obtížnou cestu Josefa přes dvě kosinové věty. Eliška měla okamžitě hotovo, zatímco Josef se potýkal s řešením kvadratické rovnice.

5.6.14 Diagnostika porozumění sinové větě

Zeptal jsem se žáků, jestli lze sinovou větu použít, známe-li tři strany a ptáme-li se po úhlech. Žáci správně tvrdili, že nelze. Zatímco Josef dále řešil úlohu, ptal jsem se žáků, jestli lze sinovou větu použít v libovolném trojúhelníku. Souhlasili, tak jsem se speciálně doptal na pravoúhlý. Současně jsem řešil numerické chyby v Josefově výpočtu strany c. Nakonec Josef vypočítal jen stranu c. Naznačil jsem, že je zapotřebí si svůj postup vždy dobře rozmyslet. Žáci už měli dávno dopočteno, tak jsem je musel povzbudit: „Čeho se vlastně ta sinová věta týká? Máme nějaký trojúhelník, v jakém poměru je vždycky ta strana k jakýmu úhlu? Jaký je ten úhel vůči té straně? Přilehlý, nebo protilehlý?“ Žáci si mysleli, že se jedná o přilehlý úhel. Načrtnul jsem proto trojúhelník s popisem, ze kterého už bylo vše zřejmé.

5.6.15 Aplikační úloha

Žákům jsem nadiktoval aplikační úhlu 5.5.2. Vysvětlil jsem jim pojem zorný úhel a vyvolal jsem k tabuli Martina, aby situaci zakreslil. S menší dopomocí to zvládnul, zatímco žáci mezi sebou hovořili o zorném úhlu a o úloze. Nějaký žák se mě zeptal, jak byl vysoký člověk, jenž pozoroval řeku. Domníval se správně, že jeho výška rozhoduje o zorném úhlu pozorované řeky. Tuto nejasnost úlohy jsem upřesnil tvrzením, že jeho oči byly ve výšce jedenácti metrů. Upozornil jsem žáky, že lze v obrázku vidět dva pravoúhlé trojúhelníky (obrázek 5.8).

Žákyně, kterou jsem vyvolal, vypočítala vzdálenost $|ED|$ pomocí Pythagorovy věty. Další žák, kterého jsem vyvolal, použil kosinovou větu pro trojúhelník EBD, do které dosadil vzdálenosti $|EB|$, $|ED|$ a $|BD|$ a hledal zorný úhel řeky α. Již v průběhu jeho zkráceného výpočtu zaznívala správná řešení úlohy. Zmínil jsem způsob jím zamlčeného výpočtu vzdálenosti $|EB|$. Výsledek tohoto výpočtu měl žák nepřesně, což se projevilo i na velikosti vypočítaného zorného úhlu. Na závěr hodiny jsem shrnul postup řešení této úlohy.

5.6.16 Procvičování trigonometrických vět

Na začátku další hodiny jsem se žáků zeptal, jakým způsobem úlohu z předešlé hodiny řešili. Přikročil jsem k problematice druhého řešení při použití sinové věty. Zeptal jsem se žáků, proč se může při použití sinové věty objevit druhé řešení. Napsal jsem na tabuli rovnici $\sin\beta = 0{,}5$. Protože žáci příliš nespolupracovali, připomněl jsem jim goniometrické rovnice. Žáci se rozhodli řešit rovnici za pomoci jednotkové kružnice, pomocí níž jsem jim graficky zdůvodnil existenci druhého řešení.

Potom jsem žákům rozdal pracovní list s úlohami uvedenými v oddíle 5.5.16. Žák, jehož jsem vyvolal k tabuli na první úlohu, si příliš nevěděl rady, proto jsem mu s řešením pomáhal. Vyřešil jen část úlohy a na zbytek jsem k tabuli vyvolal jiného žáka. Nechal jsem jej řešit samostatně a sám jsem obcházel třídu. Žáci mezitím diskutovali o úlohách, opisovali řešení z tabule nebo je sami řešili. Někteří žáci pomáhali svému spolužáku vyřešit úlohu u tabule. Do konce hodiny jsme stihli vyřešit ještě druhou úlohu.

Ze zdravotních důvodů za mě další hodinu odučila Mgr. Černá. Na příští hodině jsme psali písemnou práci, kterou jsem popsal v oddíle 5.5.16. Problémy týkající se úprav rovnic platily i pro sextu, nicméně celkově byly výsledky sexty horší než výsledky druhého ročníku. Objevili se však i tady dva žáci, kteří obdrželi výbornou, a ukázali tak, že bylo možné se na písemnou práci připravit.

5.7 Zhodnocení a závěry z experimentální výuky

V oddíle 5.7.1 kriticky hodnotím výuku a v oddíle 5.7.2 přináším na základě zkušeností upravenou přípravu pro výuku kosinové a sinové věty. Na závěr uvádím v oddíle 5.7.3 jinou formu podnětné výuky tohoto tématu.

5.7.1 Zhodnocení experimentální výuky

Myšlenka odvození kosinové věty jakožto zobecnění Pythagorovy věty pro nepravoúhlé trojúhelníky je motivující. Žáci byli myšlenkou objevení nového pravidla zaujati, což se projevilo také na jejich vyšší aktivitě a pozornosti v této části hodiny. Výuka v sextě však byla zpočátku poznamenána mým dojmem, že ve druhém ročníku se vyvozování věty neúměrně protahovalo. Proto jsem tuto fázi v sextě urychlil a rezignoval jsem do jisté míry na principy podnětné výuky, což zpětně hodnotím negativně. Některé mé dotazy byly příliš návodné a v některých situacích jsem nepočkal, až se vyjádří žáci, ale učinil jsem úsudek sám. Rychlejší tempo ve spojení s faktem, že v sextě nebyl žádný „tahoun“, jakým byl ve druhém ročníku Honza, mohly zapříčinit, že žáci v sextě byli mnohem méně aktivní a současně se objevování nových souvislostí dělo obtížnějším způsobem než ve druhém ročníku. Celkově jsem zaznamenal, že žáci nebyli zvyklí na podnětnou výuku.

Činnost žáků související s třetím řádkem přípravy kosinové věty podle oddílu 5.2, tj. vyplnění prvních pěti sloupců pracovního listu (obrázek 5.1), byla pro žáky druhého ročníku jednoduchá a nemotivovaná, proto ji někteří nechtěli provádět, což jsem popsal v oddíle 5.5.2. Někteří žáci dlouho nechápali, co se po nich chtělo; zřejmě pro zmíněné důvody. U žáků sexty jsem však tyto pocity nepozoroval.

Kámen úrazu se vyskytl při rozhodování o znaménku nerovnosti v závislosti na typu trojúhelníků (oddíly 5.5.3 a 5.6.3). Velmi obtížné bylo přivést žáky na souvislost nerovnítka s velikostí největšího vnitřního úhlu v trojúhelníku. Pokud se zamyslím nad přípravou, tak jsem vůbec neočekával, že by žáci tuto souvislost z tabulky neviděli. Důvodem mohlo být, že v pracovním listě (obrázek 5.1) byl nedostatek izolovaných modelů.

Jeden z největších problémů se vyskytl u přechodu od tupoúhlého trojúhelníku k úsečce, který jsem popsal v oddílech 5.5.4 a 5.6.4. Je očividné, že sousloví „převést trojúhelník na nějaký jiný obrazec“ zapůsobilo kontraproduktivně, proto se žáci snažili doplnit trojúhelník na čtyřúhelník, jehož je součástí. Oproti otázce z přípravy „Jak můžeme změnit trojúhelník, aby bylo zřejmé, jaký vztah pro tupoúhlý trojúhelník platí?“ jsem zde totiž naváděl na hledání čtverců, kosodélníků apod.

Žáci se také ztráceli ve značení nově vznikajících trojúhelníků a úsečky. Nepochopení mohlo vznikat kvůli mému nedokonalému značení. Například vrcholy nově vzniklých trojúhelníků jsem psal s čárkovaným písmenem C, C', C'', ovšem úsečku už jsem popsal stejnými písmeny jako původní trojúhelník. Při výuce v sextě (oddíl 5.6.4) jsem dokonce komentoval vzniklou úsečku z ostroúhlého trojúhelníku jako součet původních stran trojúhelníku. Neporozuměl jsem totiž Josefově myšlence, a proto vyvstal problém se značením a s nejistotou, jak vlastně vyjádřit délku úsečky vzniklé zvětšováním úhlu.

Výpočet funkčních hodnot kosinu zabral v obou paralelkách mnoho času, přičemž mezi žáky se vyskytly velké rozdíly v rychlosti (oddíly 5.5.7 a 5.6.7). Toto první seznámení s kosinovou větou považuji za důležité, nicméně pro žáka stačí vypočítat jednu, maximálně dvě funkční hodnoty. Splní to tak svůj účel vyjadřovat neznámou a obdržet nějaké hodnoty. V případě sexty se jednalo o osmou vyučovací hodinu v rámci školního dne, což není kvůli únavě žáků nejlepší hodina pro matematiku, nicméně negativní nálady ohledně těchto výpočtů jsem zaznamenal i ve druhém ročníku, kde jsem učil v dopoledních hodinách.

Samotná vizualizace hodnot žákyní druhého ročníku do grafu popsaná v oddíle 5.5.8 byla nečekaně časově náročná. Neznal jsem žáky a možná jsem pro práci nevybral správnou žákyni. Žáci si nebyli jisti, zda se jedná o funkci kosinus. Pouze tipovali a nehledali pro svá tvrzení argumenty. Domnívám se, že společným jmenovatelem těchto problémů byla neukotvenost poznatků o grafech goniometrických funkcí. Mohlo to být způsobeno menším intervalem, na kterém jsme kosinus objevovali oproti obvyklému znázornění celé periody této funkce. Proto možná někteří žáci neviděli v grafu funkci kosinus. Žáci se také příliš neorientovali ve význačných hodnotách goniometrických funkcí a v jejich vyjádření v desetinných číslech. Neměli příliš představu o tom, kolik je $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nebo $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Svůj vliv také mělo velmi nepřesné vynášení hodnot do grafů. Domnívám se, že zdůvodňování propojení diskrétních bodů grafu bylo zbytečné. Uvědomuji si nesmyslnost těchto mých dotazů a nepochopení ze strany žáků.

Ve druhém ročníku se vyskytl problém se skupinovou prací při objevování sinové věty, o čemž jsem psal v oddíle 5.5.11. Několikrát se mě ptali, jak postupovat, což vypovídá buď o jejich nesoustředěnosti způsobené skupinovou prací, nebo neznalostí pojmu poměr. Zmiňoval jsem v tomto oddíle také skutečnost, že žáci často vyřkli vztah 5.3, což si vysvětluji tím, že upřednostňovali řešení úlohy pomocí vzorce, který se pro ně stal důležitým poznatkem, před nejistým uvažováním o pojmu poměr. Vysvětlením snahy žáků použít kosinovou větu může být fakt, že žáci byli zvyklí procvičovat novou látku po jejím výkladu na příkladech. Proto mohli úlohu na hledání největšího z poměrů považovat za úlohu na procvičení nového poznatku – kosinové věty –, a proto možná tolikrát zaznělo její znění nebo samotné slovo kosinus.

Při porovnávání výsledků úlohy na hledání největšího z poměrů v sextě jsem narazil na pozoruhodné pochopení poměru. Žáci naměřené poměry rozšiřovali, aby obdrželi stejné jmenovatele poměrů a byli je pak schopni porovnat, o čemž jsem psal v oddíle 5.6.12. Je otázkou, jestli jsem neměl Martinu nechat napsat poměry tímto způsobem.

Ve druhém ročníku jsem se snažil stanovením hypotézy sinové věty žáky namotivovat k důkazu. Tuto část výuky jsem rozebral v oddíle 5.5.12. Motivace k objevování sinové věty probíhala analogií na úlohu najít největší součet vnitřních úhlů v trojúhelníku. I v tomto případě jsme se žáky došli k hypotéze, nad níž visel otazník. Podařilo se mi vyvolat v žácích tímto objevováním potřebu důkazu, po němž bychom tento otazník mohli odstranit. V žácích jsem snad vyvolal pocit „excitement and enjoyment" (vzrušení a potěšení), který je podle článku [Hanna 2000] důležitý pro motivaci žáků k důkazu.

Přesto se v této třídě projevilo nepochopení obecnosti důkazu. Žáci považovali za dostatečné ověření hypotézy dosazení hodnot. S náznaky nepochopení obecnosti důkazu jsem se setkal i po dokončení důkazu sinové věty. Zpětně se domnívám, že jsem měl při objevení těchto neporozumění poskytnout žákům konkrétní trojúhelník na „ověření" a následně zavést diskuzi o minimálním nutném počtu trojúhelníků pro úplné dokázání této věty. Žáci by možná projevili potřebu obecného důkazu.

Při diskuzi o důkazu sinové věty v druhém ročníku jsem zpozoroval, že při zmínce o pravoúhlém trojúhelníku žáci brzy zmiňovali Pythagorovu větu, o čemž jsem psal v oddíle 5.5.12. Byla v myslích žáků s pravoúhlým trojúhelníkem pevně spjata. Vysvětluji si to tím, že se učí poměrně brzy, často se využívá a v neposlední řadě pro svoji jednoduchost, a to jak názvu, tak samotného znění.

Podobně bych zdůvodnil časté zmiňování vět o shodnosti trojúhelníků. Žáci druhého ročníku odhalili souvislost vět o shodnosti trojúhelníků s výběrem mezi použitím kosinové nebo sinové věty, o které píše L. Vízek [Vízek 2015]. Irena sama objevila souvislost těchto dvou oblastí geometrie a zmínila ji třikrát (v oddíle 5.5.10, 5.5.12 a 5.5.14). Sám jsem je předtím do souvislosti nedával, jelikož mi nepřipadalo důležité mít rozhodovací schéma, podle kterého danou trigonometrickou větu použít. L. Vízek navrhuje nejprve u každého trojúhelníku rozhodnout, jakou větou o shodnosti je určen, a následně usoudit, kterou trigonometrickou větu použít. Z didaktického hlediska se domnívám, že pokud má být tato souvislost vyslovena, je nezbytné, aby ji objevili žáci, jako se to stalo ve druhém ročníku (oddíl 5.5.14). Pokud se stane, že žáci tuto souvislost neobjeví, pak je možné, že se ve třídě vyskytnou různé způsoby řešení úlohy, jako se to několikrát stalo v sextě (oddíl 5.6.13). Je dobré, pokud se ve třídě objeví více různých postupů vedoucích k cíli. Domnívám se také, že uvedení této souvislosti v učebnici může vést pouze k jejímu přečtení, nikoliv k pochopení a porozumění. L. Vízek dále nezmiňuje, že například trojúhelník určený větou Ssu lze řešit také pomocí kosinové věty. A to jak pro výpočet délky třetí strany trojúhelníku, tak následně druhého vnitřního úhlu trojúhelníku. Konkrétní úlohu takto vyřešenou předkládám v oddíle 5.5.10. V obou paralelkách jsem využil komplikovanosti tohoto způsobu řešení úlohy za účelem motivace žáků pro objevování sinové věty.

5.7.2 Příprava k výuce kosinové a sinové věty

Využiji zkušeností, kterých jsem nabyl při výuce trigonometrických vět a následném zhlédnutí záznamů hodin, i znalostí, které jsem získal analýzou učebnic i jiných textů, abych vytvořil přípravu pro podnětnou výuku kosinové a sinové věty vhodnou pro všeobecná gymnázia. Uvádím celou přípravu ve formě zadání úloh, poznámek a řešení. Přípravu nerozděluji na jednotlivé hodiny, protože práci s časem považuji za individuální záležitost. Zatímco u kosinové věty pouze modifikuji svou původní přípravu, u sinové věty uvádím zcela nový přístup. Činím tak zejména z toho důvodu, že žáky v experimentální výuce úloha na hledání největšího z poměrů figurujících v sinové větě na myšlenku rovnosti těchto poměrů nenavedla. V tomto oddíle, pokud není řečeno jinak, je uvažováno obvyklé značení vrcholů, stran a vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

Pomůcky žáků: kalkulačka, pracovní list obsahující trojúhelníky (obrázek 5.13), vyplněná tabulka (tabulka 5.3), čtverečkovaný a milimetrový papír

Nutné předchozí znalosti: úprava algebraických výrazů a rovnic, Pythagorova věta, goniometrie (definice funkcí sinus, kosinus, tangens, kotangens, úprava goniometrických rovnic)

Úloha 5.7.1 (diskuze) *Porovnejte vlastnosti pravoúhlého a obecného trojúhelníku.*

Poznámka: Blok výuky kosinové a sinové věty začíná motivací žáků prostřednictvím úpravy Pythagorovy věty. Učitel se žáků ptá, co vědí o pravoúhlém a obecném trojúhelníku, jaké jsou mezi nimi rozdíly a co mají společného. Všechny jejich návrhy zapisuje na tabuli. Může oba typy trojúhelníků zakreslit na tabuli. Žáci sami dospějí k tomu, že znají Pythagorovu větu, která platí jen v pravoúhlém trojúhelníku. Úkolem učitele je motivovat hledání analogie této věty pro obecný trojúhelník slovy: „O pravoúhlém trojúhelníku víme mnoho věcí, zejména umíme počítat délky jeho stran. Pojďme hledat větu podobnou Pythagorově, která bude platit v obecném trojúhelníku. Lze za tímto účelem navrhnout nějakou podobnou větu jako Pythagorovu pro obecný trojúhelník?“

Řešení: Žáci mohou navrhnout, že pro pravoúhlý trojúhelník platí: trojúhelníková nerovnost, pravý úhel, Pythagorova věta, věty o shodnosti, 180°, goniometrické funkce, ... Pro obecný trojúhelník mohou navrhnout, že platí: trojúhelníková nerovnost, věty o shodnosti, 180°.

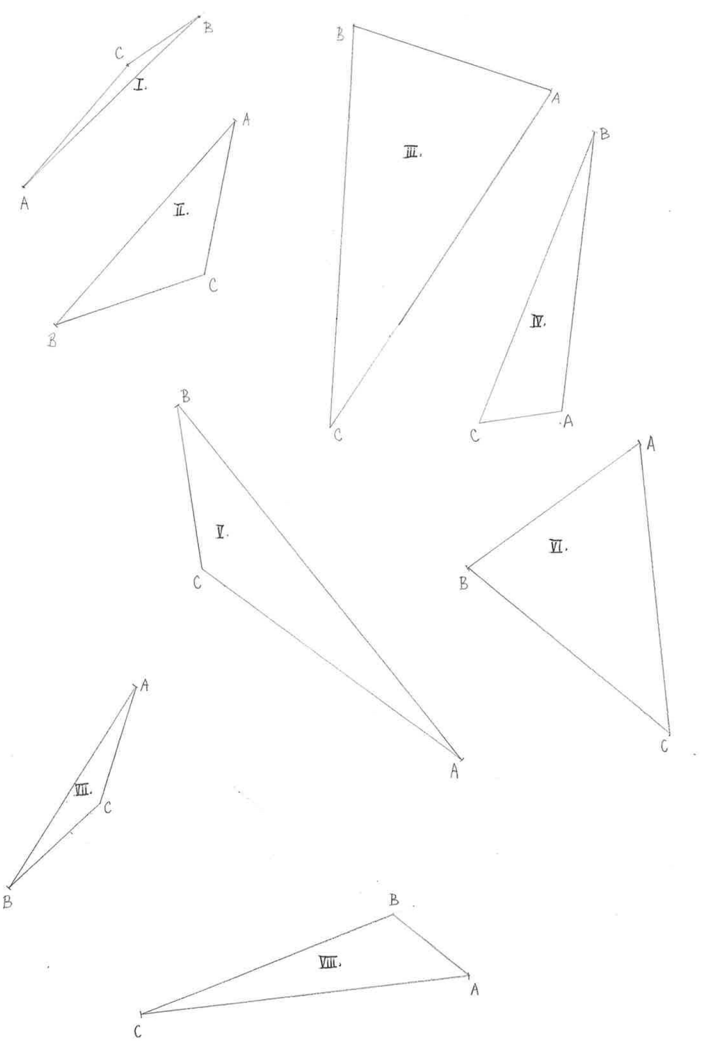
Úloha 5.7.2 (práce ve dvojicích) *Zkoumejte, co platí pro čtverce nad stranami obecného trojúhelníku.*

Poznámka: Učitel dá žákům takto obecné zadání a pokud na nic významného nepřijdou, přejde k další úloze. Jestliže žáci přijdou s konstruktivními nápady, vyvolá je učitel k tabuli, aby své myšlenky vysvětlili spolužákům.

Úloha 5.7.3 *Porovnejte velikosti c^2 a $a^2 + b^2$ v obecném trojúhelníku. Zamyslete se nad pravidlem rozhodujícím o znaménku.*

Poznámka: Cílem této (a předchozí) aktivity je, aby žáci objevili, že se velikosti zmíněných veličin proměňují, a odhalili závislost mezi velikostí úhlu γ a typem znaménka mezi veličinami. Učitel má na výběr ze dvou variant pracovního prostředí: pracovní list (obrázek 5.13) nebo program Geogebra. Používání Geogebry předpokládá u žáků schopnost narýsovat v programu trojúhelník a čtverec nad úsečkou a schopnost vyjádřit obsahy čtverců za účelem jejich porovnání. V obou případech napíše učitel na tabuli vedle sebe c^2 a $a^2 + b^2$. Žákovské bádání lze podporovat otázkami: „Co můžeme říct o c^2 a $a^2 + b^2$ v obecném trojúhelníku? Co napíšu mezi nimi za znaménko? Bude to vždy stejné? Co je menší, co je větší? Na čem to závisí? Je tam nějaké pravidlo? Existuje nějaká skupina trojúhelníků, pro které to vždy bude stejné?“ Učitel dopíše znaménka mezi veličiny.

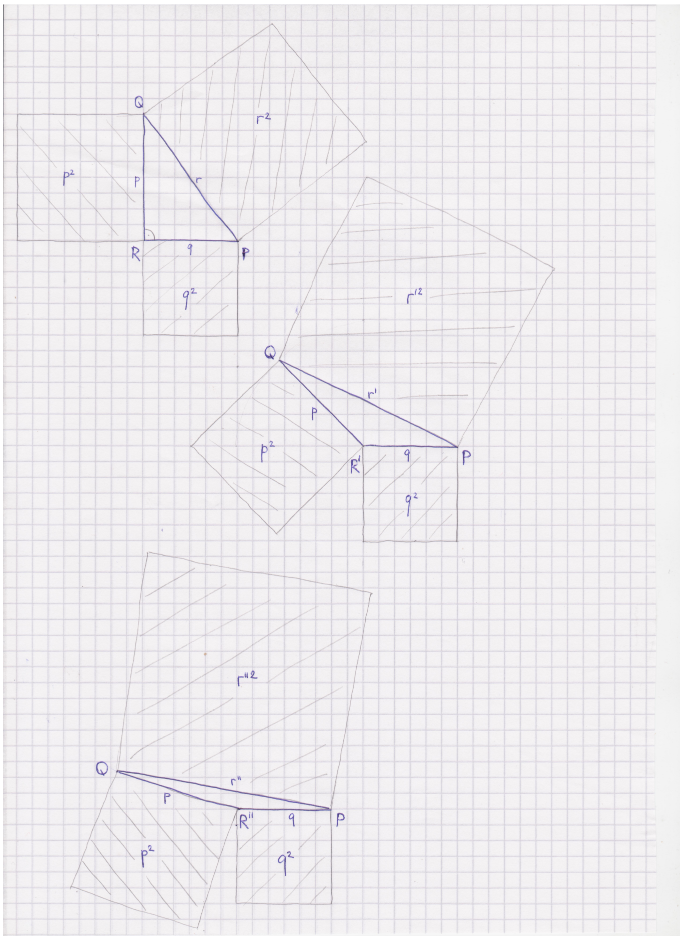
Řešení: $\gamma > 90° \Rightarrow c^2 > a^2 + b^2$, $\gamma < 90° \Rightarrow c^2 < a^2 + b^2$



Obrázek 5.13: Pracovní list.

Úloha 5.7.4 (samostatná práce s následným referátem žáků) *Nakreslete na čtverečkovaný papír pravoúhlý trojúhelník PQR s přeponou r a tupoúhlý trojúhelník PQR' se shodnou délkou stran p, q a s tupým úhlem u vrcholu R'. Stranu protilehlou vrcholu R' označujme r'. Vyznačte obsahy p^2, q^2, r^2 a r'^2 a poslední dva porovnejte. Dále nakreslete trojúhelník PQR'' se shodnou délkou stran p, q a s ještě větší velikostí úhlu u vrcholu R''. Opakujte předchozí postup. Kam může tento proces dospět?*

Poznámka: Aktivita má za cíl posílit přesvědčení nabyté v předchozí úloze. Jedná se o grafické znázornění porovnání obsahů čtverců nad nejdelšími stranami pravoúhlého a tupoúhlých trojúhelníků (obrázek 5.14). Úloha lze řešit metodou sčítáním čtverečků. Žáci by si měli uvědomit, že $r^2 = p^2 + q^2$ a měli by dospět k porovnání r'^2, resp. r''^2 se součtem obsahů čtverců dvou zbývajících stran. Žáci nemusí ještě zodpovědět poslední otázku.



Obrázek 5.14: Obrázek znázorňující možné zakreslení úlohy 5.7.4.

Řešení: $r'^2 > r^2$, proto $r'^2 > p^2 + q^2$; analogicky $r''^2 > r^2$, proto $r''^2 > p^2 + q^2$; proces může dospět až do případu, kdy je velikost úhlu 180°, jedná se tedy o úsečku délky $p+q$.

Úloha 5.7.5 (diskuze) *Mějme tupoúhlý trojúhelník ABC s tupým úhlem u vrcholu C. Zvětšujte velikost úhlu u vrcholu C při zachování délek stran a, b. Nakolik jej lze zvětšit? Zakreslete případ, který obsahuje co největší stranu c_{max}.*

Poznámka: Cílem aktivity je pochopení přechodu od tupoúhlého trojúhelníku k úsečce. Učitel načrtne na tabuli tupoúhlý trojúhelník ABC, zopakuje, že platí $c^2 > a^2 + b^2$, a ptá se, jak lze c^2 omezit shora. Učitel se snaží přivést žáky na myšlenku zvětšování velikosti tupého úhlu γ ke 180°. Učitel podporuje diskuzi o tomto procesu otázkami: „Do jaké míry lze zvětšit stranu c? V jakém případě bude strana c největší? Povšimněte si předchozí úlohy, v níž se také mění pouze jedna strana trojúhelníku. Kam může až tento proces dospět? Který tupoúhlý trojúhelník má největší délku strany c? Do jakého útvaru se tupoúhlý trojúhelník změní?“

Řešení: Výsledkem je úsečka o délce $c_{max}(= a + b)$, přičemž velikost úhlu u vrcholu C je 180°.

Úloha 5.7.6 (diskuze) *Vyjádřete délku úsečky c_{max} a omezte pomocí tohoto poznatku c^2 shora.*

Poznámka: Cílem úlohy je vyjádřit c^2 pro limitní velikost úhlu γ. Žáci na základě předchozí úlohy dospějí k tomu, že $c_{max} = a + b$ a učitel se táže na to, jak lze vyjádřit c^2. Žáci objeví, že rovnost stačí umocnit a využít faktu, že $c < c_{max}$.

Řešení: $c_{max} = a + b$, $c^2_{max} = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, proto $c^2 < a^2 + b^2 + 2ab$

Úloha 5.7.7 (samostatná práce s následným referátem žáků) *Nakreslete na čtverečkovaný papír pravoúhlý trojúhelník PQR s přeponou r a ostroúhlý trojúhelník PQR' se shodnou délkou stran p, q. Stranu protilehlou vrcholu R' označujme r'. Vyznačte obsahy p^2, q^2, r^2 a r'^2 a poslední dva porovnejte. Dále nakreslete trojúhelník PQR'' se shodnou délkou stran p, q a s ještě menší velikostí úhlu u vrcholu R''. Opakujte předchozí postup. Kam může tento proces dospět?*

Poznámka: Obdoba aktivity v úloze 5.7.4 s tupoúhlým trojúhelníkem.

Řešení: $r'^2 < r^2$, proto $r'^2 < p^2 + q^2$; analogicky $r''^2 < r^2$, proto $r''^2 < p^2 + q^2$; proces může dospět až do případu, kdy je velikost úhlu 0°, jedná se tedy o úsečku délky p nebo q.

Úloha 5.7.8 (diskuze) *Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC, $a > b$. Zmenšujte velikost úhlu u vrcholu C při zachování délek stran a, b. Nakolik jej lze zmenšit? Zakreslete případ, který obsahuje co nejmenší stranu c_{min}.*

Poznámka: Obdoba aktivity v úloze 5.7.5 s tupoúhlým trojúhelníkem. Učitel načrtne na tabuli ostroúhlý trojúhelník ABC, zopakuje, že platí $c^2 < a^2 + b^2$, a ptá se, jak lze c^2

omezit zdola. Učitel se snaží přivést žáky na myšlenku zmenšování velikosti úhlu γ k 0°. Učitel podporuje diskuzi podobnými otázkami jako v úloze 5.7.5.

Řešení: Výsledkem je úsečka o délce $a(= b + c_{min})$.

Úloha 5.7.9 (diskuze) *Vyjádřete délku úsečky c_{min} a omezte pomocí tohoto poznatku c^2 zdola.*

Poznámka: Žáci na základě předchozí úlohy dospějí k tomu, že $a = b + c_{min}$, z čehož vyjádří $c_{min} = a - b$ a učitel se táže na to, jak lze vyjádřit c^2. Žáci objeví, že rovnost stačí umocnit a využít faktu, že $c > c_{min}$. V závěru učitel podtrhne vyjádření c^2_{max} a c^2_{min}, k nimž dopíše velikosti úhlu γ.

Řešení: $c_{min} = a - b$, $c^2_{min} = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, proto $c^2 > a^2 + b^2 - 2ab$

Úloha 5.7.10 (diskuze) *Na čem závisí velikost c^2? Slovně popište vyjádření c^2.*

Poznámka: Úkolem žáků je objevit závislost c^2 na velikosti úhlu γ. Napomáhá jim k tomu zdůraznění limitních velikostí úhlu γ. Učitel se může zeptat na Pythagorovu větu a zmínit souvislost s pravým úhlem. Žáci odhalují, že c^2 závisí na velikosti úhlu γ, a učitel podporuje slovní popis c^2 : „Jak byste vyjádřili c^2? Co tam bude vždy? Co se naopak mění?“ Žáci v rámci diskuze dospějí k řešení. Protože se c^2 mění v závislosti na velikosti úhlu γ, navrhne učitel zápis $c^2 = a^2 + b^2 - 2abf(\gamma)$. Učitel vysvětlí, že nezáleží na tom, zda dáme před $2ab$ plus nebo mínus. Vysvětlí také, že $f(\gamma)$ značí závislost na velikosti úhlu γ.

Řešení: c^2 závisí na velikosti úhlu γ, $a^2 + b^2$ tam bude vždy a mění se třetí člen.

Úloha 5.7.11 (skupinová práce) *Vypočítejte velikost $f(\gamma)$ pro zvolený trojúhelník a zapište svůj výsledek spolu s odpovídající velikostí úhlu γ do připravené tabulky na tabuli.*

Poznámka: Učitel rozdá žákům tabulku 5.3 parametrů trojúhelníků z pracovního listu, rozesadí je do skupin a přiřadí každé skupině jeden až dva trojúhelníky. Je možné zopakovat zápis c^2 z předchozí úlohy. Podle potřeby lze nechat žáky na tabuli z tohoto vztahu vyjádřit $f(\gamma)$. Těm, kteří zvládnou tuto úlohu brzy, zadá učitel další trojúhelník.

Řešení: Na tabuli může vzniknout například tabulka 3.1, s. 21.

Tabulka 5.3: Tabulka zachycuje hodnoty parametrů trojúhelníků z pracovního listu 5.13.

parametr	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
a	2,3	4,15	10,6	8,25	4,35	6,9	3,2	7,1
b	4,25	4,15	10,6	2,2	8,5	7,7	3,2	8,7
c	6,5	7,2	5,5	7,4	12	5,6	6,2	2,55
γ	165°	120°	30°	60°	135°	45°	150°	15°

Úloha 5.7.12 (samostatná práce) *Na milimetrový papír vykreslete funkční závislost f na úhlu γ podle tabulky na tabuli. Diskrétní body propojte.*

Poznámka: Použití milimetrového papíru zaručuje větší přesnost nákresu funkce $\cos\gamma$ a její následné snazší rozpoznání. Alternativou je použití výpočetní techniky, např. programu MS Excel. Žáci vykreslí tuto závislost a učitel se ptá, jakou funkci jim graf připomíná. Pokud žáci nereagují, je možné se zeptat, které ze známých funkcí mají v argumentu úhel, a přivést tak žáky na funkci kosinus. Jakmile žáci funkci objeví, přepíše učitel vztah pro c^2 na $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ a nazve jej kosinovou větou. Následně lze provést důkaz kosinové věty jako důkaz 3.1.1.

Řešení: Diskrétní graf může mít například podobu obrázku 3.5.

Úloha 5.7.13 (diskuze) *Čeho se kosinová věta týká? Pro které trojúhelníky platí kosinová věta? Zapište vyjádření kosinové věty s úhlem α nebo β. Jaký úhel vystupuje ve znění kosinové věty (vzhledem k neznámé na druhé straně rovnosti)? Jaký je vztah mezi kosinovou a Pythagorovou větou? Lze větu použít pro řešení libovolné úlohy o trojúhelnících? Zapište kosinovou větu zahrnující úhel ω u vrcholu M trojúhelníku KLM.*

Poznámka: Sada otázek má za cíl, aby žáci kosinovou větu pochopili. Učitel se táže a diskutuje se žáky. Pokud žáci nenaleznou odpověď, zapíše učitel otázku na nástěnku a nechá ji otevřenou. K těmto otázkám se lze vrátit po zavedení sinové věty.

Řešení: určování velikostí stran a vnitřních úhlů obecného trojúhelníku; pro všechny; $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ nebo $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$; protilehlý; Pythagorova věta je speciální případ kosinové věty pro pravoúhlý trojúhelník; nelze (lze pomocí ní řešit trojúhelníky zadané třemi stranami nebo dvěma stranami a jedním úhlem (věty o shodnosti trojúhelníků by měly zaznít pouze z popudu žáků)); $m^2 = k^2 + l^2 - 2kl\cos\omega$

Úloha 5.7.14 (ve dvojicích) *Zadání i řešení je popsané v úloze 5.5.1.*

Poznámka: Je vhodné se žáků zeptat, zda lze použít kosinovou větu. Předpokládáme, že žáci budou souhlasit a dodají, že jedním použitím kosinové věty získáme velikost strany k. Žáci by měli zjistit, že potřebují jiné vyjádření kosinové věty, aby vypočítali velikost úhlu ϕ.

Úloha 5.7.15 (diskuze) *Určete délku strany m trojúhelníku KLM s vnitřními úhly κ, λ, μ postupně u vrcholů K, L, M, pokud*

a) $k = 4$, $\mu = 60°$, $\kappa = 60°$,

b) $k = 4$, $\mu = 60°$, $\kappa = 30°$,

c) $k = 4$, $\mu = 60°$, $\kappa = 45°$,

d) $k = 4$, $\mu = 45°$, $\kappa = 30°$,

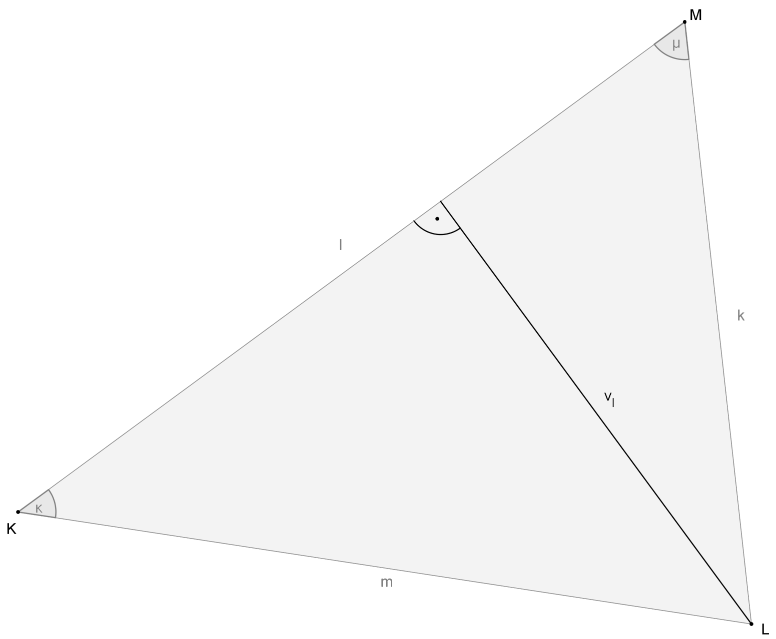
e) $k = 4$, $\mu = 45°$, $\kappa = 60°$,

f) $k = 4$, $\mu = 30°$, $\kappa = 45°$, ...,

g) známe obecně velikosti strany k a vnitřních úhlů μ, κ.

Poznámka: Pomocí této série gradovaných úloh, které žáci řeší sami, se snažíme dojít k objevení sinové věty. Motivace pro hledání nové trigonometrické věty je obsažena v předchozí úloze. Předpokládám, že žáci nejprve vždy dopočítají velikost úhlu λ. Varianta a) je rovnostranný trojúhelník, proto se jedná o úlohu, jež není nutné počítat. Varianta b) je pravoúhlý trojúhelník, kterou předpokládám, že budou žáci řešit pomocí definic goniometrických funkcí. Další varianty jsou obecné trojúhelníky. Žáky nabádáme k využívání znalostí o trojúhelnících, k využití definic goniometrických funkcí anebo k dokreslení pravoúhlých trojúhelníků. K vyřešení by měli žáci do obrázku dokreslit výšku v_l na stranu l (obrázek 5.15). Tak vzniknou dva pravoúhlé trojúhelníky, v nichž platí (žáci opět použijí goniometrické funkce) $\sin\mu = \frac{v_l}{k}$ a $\sin\kappa = \frac{v_l}{m}$. Předpokládám, že žáci budou úlohu řešit postupně, tj. nejprve vypočítají velikost výšky v_l ze vztahu $v_l = k \cdot \sin\mu$, kterou následně dosadí do vztahu $m = \frac{v_l}{\sin\kappa}$, pomocí nějž určí velikost strany m.

Učitel žákům ponechá po několik úloh tento postup výpočtu. Volitelnou délku tohoto stadia určuje učitel a v zadání je znázorněna pomocí třech teček. Po určitém čase, kdy se výpočty zrychlí a zautomatizují, se učitel při výpočtu dalších variant žáků zeptá, jestli neexistuje efektivnější způsob výpočtu než přes počítání velikosti výšky v_l. Žáci by postupně měli sami přijít na to, že ve výpočtu výšku v_l nepotřebujeme, protože stačí tyto dvě rovnosti porovnat. V případě, že by na to nepřišli, tak je učitel upozorní, že v_l se vyskytuje v obou postupných výpočtech, a zeptá se jich, jestli se proto nelze v_l nějakým způsobem zbavit. Pokud by žáci nereagovali, tak je učitel nechá z obou vztahů vyjádřit $v_l = k \cdot \sin \mu$, $v_l = m \cdot \sin \kappa$.



Obrázek 5.15: Obrázek trojúhelníku KLM podle varianty c) úlohy 5.7.15 s dokreslenou výškou v_l.

Úlohy tohoto typu (i s měnící se velikostí strany k) lze řešit, dokud to žáci neobjeví a nenapíšou sinovou větu ve tvaru $k \cdot \sin \mu = m \cdot \sin \kappa$. Učitel zapíše vztah $\frac{k}{\sin \kappa} = \frac{m}{\sin \mu}$, nazve jej sinovou větou a zeptá se, jak by to bylo se stranou l. Žáci odhalí, že se jedná o naprosto stejný postup, a učitel doplní sinovou větu. Variantu g) bych zařadil pouze v případě, kdyby se žáci nedokázali od výpočtů přes výšku v_l oprostit. Následně lze provést důkaz sinové věty jako důkaz 3.2.1.

Řešení: a) $m = 4$, b) $m = 4\sqrt{3}$, c) $m = 2\sqrt{6}$, d) $m = 4\sqrt{2}$, e) $m = \frac{4\sqrt{6}}{3}$, f) $m = 2\sqrt{2}$, g) $m = k \cdot \frac{\sin \mu}{\sin \kappa}$

Úloha 5.7.16 (diskuze) *Čeho se sinová věta týká? Pro které trojúhelníky platí sinová věta? Sinová věta hovoří o rovnosti poměrů. V rámci jednoho poměru, o jaký úhel se jedná vůči dané straně? Lze větu použít pro řešení libovolné úlohy o trojúhelnících? Kdy lze použít sinovou a kdy kosinovou větu?*

Poznámka: Sada otázek má za cíl, aby žáci sinovou větu pochopili. Učitel se táže a diskutuje se žáky. Pokud žáci nenaleznou odpověď, zapíše učitel otázku na nástěnku a nechá ji otevřenou.

Řešení: určování velikostí stran a vnitřních úhlů obecného trojúhelníku; pro všechny; protilehlý; nelze (lze pomocí ní řešit trojúhelníky zadané dvěma stranami a úhlem pro jedné z nich nebo jednou stranou a dvěma úhly (věty o shodnosti trojúhelníků by měly zaznít pouze z popudu žáků)); použití sinové věty – viz předchozí otázka, kosinové – viz úloha 5.7.13

Úloha 5.7.17 (diskuze) *Pod jakým zorným úhlem je vidět řeka, jestliže je v daném místě široká 58 m a dívám se na ni z výšky 11 m nad řekou ve vzdálenosti 12 m od řeky?*

Poznámka: Učitel vysvětlí pojem zorný úhel. Žáci nejprve řeší samostatně úlohu, následně vyvolá učitel některé žáky k tabuli, aby danou situaci zakreslili a vypočítali. Učitel by neměl žákům nic napovídat. Dále je možno řešit další úlohy z dostupných učebnic a sbírek.

Řešení: Řeka je vidět pod úhlem 33,5°.

5.7.3 Kosinová věta podle M. Hejného

Ve skriptech Úvod do studia analytické geometrie ([Stehlíková, Hejný, Jirotková 2005], str. 34) nalezneme jiný konstruktivistický přístup k odvození kosinové věty. Je více kalkulativní než přístup prezentovaný v této práci. Jedná se o sérii úloh na řešení trojúhelníku zadaného pomocí věty *sus*, které řeší žáci, přičemž každá úloha je izolovaným modelem kosinové věty.

Žáci nejdříve objeví speciální typy kosinové věty, které následně zobecní. V trojúhelníku ABC známe velikosti stran a, b a úhlu γ. Nejprve uvažujme $\gamma = 60°$, strany a, b se postupně proměňují. Zafixujeme-li stranu $a = 6$, pak měníme stranu $b \in \{6, 4, 7, ...\}$. Následně změníme stranu $a = 7$ a stranu b měníme stejným způsobem. V tomto procesu lze dále pokračovat, dokud žáci neobjeví, že pro $\gamma = 60°$ platí $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. Dále uvažujme $\gamma = 45°$, proces postupných změn velikostí stran bude stejný. Žáci objeví, že pro $\gamma = 45°$ platí $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$. Totéž lze opakovat pro $\gamma = 30°$, přičemž platí $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab$. Podle M. Hejného hloubavější žáci ze třídy již u druhé velikosti úhlu γ objeví, že c^2 je rovno $a^2 + b^2 -$ něco $\cdot\, ab$. Kromě tohoto generického modelu mohou žáci dospět k přesvědčení, že $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{n}ab$ bez jasné představy o čísle n ([Stehlíková, Hejný, Jirotková 2005], str. 34). Žáci vědí, že číslo n závisí na velikosti úhlu γ. Zbývá přejít k zápisu $c^2 = a^2 + b^2 - f(\gamma)ab$ a pokračovat způsobem uvedeným v oddíle 3.1.

Charakter výuky kosinové věty podle tohoto přístupu zapadá do charakteru tzv. Hejného metody vyučování matematice. Na rozdíl od klasické výuky zde učitel neprobírá dlouhou dobu jedno téma, naopak témata jsou rozprostřená do celého výukového procesu, a proto vzniká poznání žáků postupně a neustále. Výše uvedený nástin úloh tedy učitel nezadává žákům jako sérii po sobě jdoucích úloh, ale například dvě, tři úlohy týdně. Mezitím se žáci věnují jiným tématům. M. Hejný uvádí, že doba k objevení speciálních tvarů kosinové věty je přibližně dva až tři měsíce ([Stehlíková, Hejný, Jirotková 2005], str. 34).

Kapitola 6

Závěr

Ve své práci jsem se zabýval konstruktivistickým přístupem k výuce kosinové a sinové věty. Jedná se o relativně malou část středoškolského učiva matematiky, která dosud nebyla příliš didakticky zpracována. Setkal jsem se s několika učiteli, kteří tvrdili, že jsou to dva vzorce, které je třeba žákům říct a náležitě je procvičit v úlohách. Jsem přesvědčen, že tento přístup zapříčiňuje učení se matematice jako nauce o hotových poznatcích zpaměti a způsobuje nízkou úroveň porozumění naučeným poznatkům. Do protikladu stavím podnětnou výuku uvedenou v této práci, která alespoň některé z žáků vedla k zamyšlení se nad tématem, k propojování více oblastí matematiky a k vlastnímu budování svých poznatků.

Zabýval jsem se zejména dvěma oblastmi, a to analýzou učebnic a popisem výuky s následným vytvořením přípravy pro podnětnou výuku. Analyzoval jsem pět různých středoškolských učebnic, které se zabývají tématem trigonometrie. Svým zaměřením jsou učebnice orientované na gymnázia, střední odborné školy i střední odborná učiliště. Ani jedna z učebnic neobsahuje takové zpracování trigonometrických vět, které by vedlo k podnětné výuce. Každá učebnice upřednostňuje rychlé sdělení vět žákům s následným důrazem na procvičování. Navíc je většina učebnic doplněna o instruktivní návody a postupy, které žáky připravují o možnost samostatného promýšlení dané problematiky. Dospěl jsem k přesvědčení, že učebnice jako celek nejsou použitelné při podnětné výuce. Přesto jsem v každé učebnici nalezl zajímavé konkrétní otázky, úlohy nebo myšlenky, které jsem zapracoval do vzniklé přípravy.

Do přípravy jsem také zakomponoval zkušenosti nabyté experimentální výukou. Popis výuky tvoří většinu textu práce. Uvědomil jsem si, že jedním ze zásadních faktorů ovlivňujících výuku je motivace žáků. Ukázalo se, že žáky motivovala zvědavost, jak je možné modifikovat Pythagorovu větu pro obecný trojúhelník. Uvědomil jsem si, že činnost spojená s měřením a porovnáváním trojúhelníků musí být také motivovaná, spojená s nějakým smyslem, pro který ji žáci vykonávají. Motivace byla důležitá i pro hledání sinové věty. Nabyl jsem přesvědčení, že zařazení důkazu do výuky by měla předcházet motivace ve formě vyvolání nejistoty žáků o dokazovaném tvrzení.

Zjistil jsem, že je nutné přesně dodržovat znění v přípravě uvedených otázek, protože i malé změny vedly k nečekaným odpovědím žáků a zejména ke zmatkům, co vlastně mají dělat. Doporučuji to při případném používání uvedené přípravy. Hlouběji jsem rozpracoval problematické místo limitního přechodu od trojúhelníku k úsečce včetně značení, což by mělo vést k méně obtížnému průběhu hodin. Precizoval jsem způsob vizualizace funkce kosinus za účelem větší názornosti grafu této funkce. Původně plánovanou přípravu sinové věty jsem zcela pozměnil a to na základě zkušeností s výukou. Domnívám se, že otázka, který z poměrů je největší, je svým způsobem umělá a raději jsem se přiklonil ke kalkulativnímu způsobu odvození sinové věty. Žáci z důvodů nepřesnosti narýsovaného a změřeného nebyli nasměrováni k hypotéze, že poměry jsou shodné. Hovořili o nich jako o podobných a často také největší z poměrů stanovili.

V práci jsem se příliš nezabýval aplikačními úlohami na téma kosinové a sinové věty. Nevěnoval jsem se ani jiným trigonometrickým větám. Mým cílem bylo navrhnout, vyzkoušet a analyzovat podnětný způsob výuky kosinové a sinové věty a následně vytvořit přípravu pro podnětnou výuku tohoto tématu. Hlavním myšlenkovým zdrojem byla zmíněná kapitola z knihy [Pritchard 2003](s. 232–236). Problematika podnětné výuky kosinové a sinové věty je nejen velmi zajímavá, ale v mnoha ohledech také otevřená.

Během experimentální výuky jsem narážel na nedostatek svých i žákovských zkušeností. Podnětným způsobem jsem totiž učil poprvé. Proto jsem se někdy od principů podnětné výuky odchýlil a sdělil toho žákům více, než jsem původně chtěl. Dalším zdrojem problémů byla chybějící zkušenost žáků s podnětnou výukou, což do jisté míry narušovalo průběh hodin. Žáci se totiž setkali pouze s transmisivním přístupem k vyučování. Projevovalo se to například tím, že pokud žáci neměli co opisovat, počítat nebo něco jednoduchého vymýšlet, tak se velice obtížně soustředili a měli potíže s uvažováním o náročnějších problémech. Bylo pro mě velmi náročné rozlišit mezi tím, kdy žáci ještě přemýšleli o problému a když už ne. Projevilo se to například v sextě (oddíl 5.6.5), kdy jsem nevydržel a žákům jsem prozradil postup na přechod od ostroúhlého trojúhelníku k úsečce. Špatně jsem pracoval s chybou žáků a nerozvíjel jsem jejich samostatné uvažování.

Na druhé straně mám radost z mnoha poznatků, na které si žáci přišli sami. Žáci obou ročníků objevili například závislost znaménka na velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku (oddíl 5.5.3 a 5.6.3) nebo i přes zmíněné obtíže odhalili funkci kosinus (oddíl 5.5.8 a 5.6.8). Měl jsem radost také z toho, že jsem žáky druhého ročníku dokázal motivovat pro důkaz sinové věty (oddíl 5.5.12), nebo že si žáci sami utvořili pravidlo, které rozhodovalo o tom, kterou z trigonometrických vět použít v závislosti na typu věty o shodnosti trojúhelníku, podle níž je trojúhelník zadán (oddíl 5.5.14). Podobné momenty z experimentální výuky mě naplňují přesvědčením, že podnětná výuka trigonometrických vět je vhodným způsobem výuky tohoto tématu.

Literatura

Bibby, N., French, D. (2003). Pythagoras extended: A geometric approach to the cosine rule. In Pritchard, C. (ed.), *The Changing Shape of Geometry. Celebrating a Century of Geometry and Geometry Teaching* (232–236). První vydání. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 0 521 53162 4.

Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P. (2009). *Matematika 8. Geometrie. Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia.* První vydání. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-686-4.

Calda, E. (2004). *Matematika pro tříleté učební obory středních odborných učilišť, 3. díl.* První vydání. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-295-3.

Calda, E. (2005). *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 3. díl.* Dotisk prvního vydání. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-109-4.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics.* **44**, 5–23.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* První vydání. Praha: Pedagogická fakulta Univerzita Karlova v Praze. ISBN 978-80-7290-776-2.

Hejný, M., Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Druhé vydání. Praha: Portál. ISBN 978-80-7367-397-0.

Krynický, M. (2015). *Matematika SŠ.realisticky.cz.* [online]. [cit. 2016-02-20]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/kapitola.php?id=95.

Odvárko, O. (2007). *Matematika pro gymnázia. Goniometrie.* Dotisk třetího vydání. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-203-8.

Skalková, J. (2007). *Obecná didaktika.* Druhé rozšířené a aktualizované vydání. Praha: Grada Publishing. ISBN 978-80-247-1821-7.

Stehlíková, N. (2007). Charakteristika kultury vyučování matematice. In A. Hošpesová, Stehlíková, N. & M. Tichá (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (13–48). První vydání. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. ISBN 978-80-7394-052-2.

Stehlíková, N., Hejný, M., Jirotková, D. (2005). *Úvod do studia analytické geometrie.* Druhé vydání. Praha: Pedagogická fakulta Univerzita Karlova v Praze. ISBN 80-7290-188-5.

Vízek, L. (2015). Řešení trojúhelníku. *Učitel matematiky.* **23**(4), 226–234. ISSN 1210-9037.

Vondra, J. (2014). *Matematika pro střední školy – 5. díl: Funkce II – Učebnice.* První vydání. Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-217-3.